بسمه تعالی

تاریخ: ۱۳ آذر ۱۳۹۵
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

آزمون میان‌ترم نظریّه‌ی علوم کامپیوتر

۱. (آ) (۱۰ نمره) قضیّه‌ی برنامه‌ی universal را بیان کنید.

جواب. قضیه‌ی Universal: برایِ هر n برنامه‌ای مانند $\mathscr{U}^n$ وجود دارد که با گرفتن $n+1$ ورودیِ $\bar{X}$ و Y، مقدار خروجی‌اش برابر است با خروجیِ برنامه‌ی با کُدِ Y رویِ ورودیِ $\bar{X}$. به دیگرسخن، برایِ هر برنامه مانند $\mathscr{P}$ داریم:

$$\mathscr{U}^n(\bar{X}, \#\mathscr{P}) = \mathscr{P}(\bar{X})$$

تابعی که برنامه‌ی $\mathscr{U}^n$ مجاسبه می‌کند، غالباً با نمادِ $\Phi^{(n)}(\bar{x}, y)$ یا $\Phi_y^{(n)}(\bar{x})$ نمایش می‌دهیم.

(ب) (۱۰ نمره) قضیّه‌ی s-m-n را بیان کنید.

جواب. قضیه‌ی s-m-n: برای هر $m, n > 0$ تابعی بازگشتی‌ـ مقدّماتی مثل $S_n^m : \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ وجود دارد طوری‌که

$$\Phi^{(m+n)}(\bar{x}, \bar{t}, y) = \Phi^{(m)}(\bar{x}, S_n^m(\bar{t}, y)) \qquad , \qquad \bar{x} = x_1, \dots x_m \quad , \quad \bar{t} = t_1, \dots, t_n$$

(ج) (۲۰ نمره) فرض کنید $\mathscr{P}$ یک برنامه برای محاسبه‌ی تابعِ f باشد. همچنین فرض کنید $\mathscr{Q}$ یک برنامه باشد با n ورودی (یعنی در آن فقط از متغیّرهایِ ورودیِ $X_1, \dots X_n$ استفاده شده است) برای محاسبه‌ی تابعِ g که در آن از مَکرو حاویِ f استفاده شده است. نشان دهید اینڍِکس g را می‌توان به‌عنوان تابعِ محاسبه‌پذیرِ تامی از ایندکس f به‌دست آورد.

جواب. برنامه‌ی $\mathscr{Q}'$ را با تغییر اندکی در برنامه‌ی $\mathscr{Q}$ به‌دست می‌آوریم. در برنامه‌ی $\mathscr{Q}$ هرجا از تابعِ $f(\bar{V})$ استفاده شده‌است، به‌جایِ آن از تابعِ $\Phi(\bar{V}, X_{n+1})$ استفاده می‌کنیم. از قضیه‌ی Universal نتیجه می‌شود:

$$\mathscr{Q}'(\bar{X}, p) = \mathscr{Q}(\bar{X}) \qquad , \qquad p := \#\mathscr{P}$$

فرض کنید $q = \#\mathscr{Q}'$. در این‌صورت طبق قضیّه‌ی s-m-n داریم:

$$\Phi(\bar{x}, x_{n+1}, q) = \Phi(\bar{x}, S_1^n(x_{n+1}, q))$$

حالا تابعِ بازگشتی‌ـ‌مقدّماتیِ $h(x) := S_1^n(x,p)$ را در نظر بگیرید. از روابط بالا واضح است که این تابع، هر ایندکس برایِ تابعِ f را به یک ایندکس برای تابعِ g تبدیل می‌کند.

۲. (۲۰ نمره) ثابت کنید تابعِ زیر محاسبه‌پذیر نیست:

$$f(n) := \mathsf{min}\{i : \phi_i = \phi_n\}$$

جواب. فرض کنید محاسبه‌پذیر باشد. هم‌چنین فرض کنید k_0 کُدِ برنامه‌ی زیر باشد:

$$X_1 \leftarrow X_1 + 1$$
$$[A] \quad IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ A$$

قرار دهید $k_1 := f(k_0)$. حالا برنامه‌ی زیر برای عضویت در مجموعه‌ی $E := \{i \in \mathbb{N} : \forall x \Phi_i(x) \uparrow\}$ تصمیم می‌گیرد:

$$IF\ f(X_1) \neq k_1\ GOTO\ E$$
$$Y \leftarrow Y + 1$$

از طرفی طبق قضیه‌ی رایس می‌دانیم E تصمیم‌پذیر نیست. این تناقض نشان می‌دهد که f محاسبه‌پذیر نیست.

۳. (۳۰ نمره) ثابت کنید عددی مثل e موجود است طوری‌که دامنه‌ی ϕ_e برابر با K شود و همچنین $e \notin K$.

جواب. برنامه‌ی $\mathscr{P}$ را در نظر بگیرید:

$$[A] \quad IF\ X_2 = X_1\ GOTO\ A$$
$$Y \leftarrow \Phi(X, X)$$

فرض کنید تابعی که توسط این برنامه محاسبه می‌شود g باشد، یعنی $g = \Psi_{\mathscr{P}}$. با توجّه به برنامه‌ی $\mathscr{P}$ داریم:

$g(x_1, x_2)\downarrow$ اگر و فقط اگر $x_2 \neq x_1$ و $\Phi(x_2, x_2)\downarrow$

حالا طبق قضیّه‌ی ریکرژن عددی مثل e موجود است طوری‌که $\Phi_e(x) = g(e, x)$. اگر x را برابر با e قرار دهیم داریم $\Phi_e(e) = g(e, e)$. بنابراین از آن‌جا که $g(e, e)\uparrow$، نتیجه می‌گیریم $\Phi_e(e)\uparrow$ و بنابراین $e \notin K$ و هم‌چنین $\mathsf{dmn}(\Phi_e) = K$.

۴. (۵۰ نمره) (آ) (۵ نمره) یک کلاسِ PRC چیست؟

جواب. یک مجموعه مثل $\mathcal{F}$ از توابع را گوییم PRC است اگر :

- تابعِ ثابتِ صِفر (روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$) و تابع‌هایِ افکنش رویِ مؤلّفه‌ی ام-i و هم‌چنین تابعِ تالی داخل $\mathcal{F}$ باشند.
- $\mathcal{F}$ نسبت به ترکیب بسته باشد.
- $\mathcal{F}$ نسبت به بازگشتِ مقدماتی (Primitive Recursion) بسته باشد.

(ب) (۵نمره) مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ بازگشتی_مقدّماتی چگونه تعریف می‌شود؟

جواب. دو راه برایِ تعریفِ مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ بازگشتی_مقدّماتی وجود دارد: تعریف از بالا و تعریف از پایین.

- تعریف از بالا: اشتراکِ همه‌ی کلاس‌های PRC.
- تعریف از پایین: مجموعه‌ی همه‌ی توابعی مثل f که برایِ آن‌ها دنباله‌ای مثلِ $\sigma := (f_0, \dots, f_n)$ وجود دارد طوری‌که $f_n = f$ و برای هر $i \leq n$، f_i یکی از توابعِ مقدماتی است یا به کمکِ بازگشت مقدماتی از روی دو تا از اعضای دیگرِ دنباله مثل f_j و f_k ($j, k < i$) تعریف می‌شود، یا اینکه به‌کمکِ ترکیب از روی چندتا از توابعِ قبلی به‌دست می‌آید.

(ج) (۲۰نمره) $f(n)$ را برابر با حاصلِ $n-1$ مرتبه به توانِ n رساندنِ عددِ n تعریف کنید. مثلاً $f(3) := 3^{3^3} = 3^{27}$. ثابت کنید این تابع بازگشتی_مقدّماتی است.

جواب. برای این‌که نشان دهیم این تابع بازگشتی_مقدّماتی است، ابتدا نشان می‌دهیم تابعِ $g(n,m)$ بازگشتی_مقدّماتی است:

$$g(n,m) := \overbrace{n^{n^{\cdots^{n}}}}^{m\ \text{مرتبه}}$$

تابعِ $g(n,m)$ در واقع حاصلِ m مرتبه به‌توان رساندنِ n است:

$$\begin{cases} g(n,0) := 1 \\ g(n,m+1) := n^{g(n,m)} \end{cases}$$

از تعریف بالا واضح است که g بازگشتی_مقدّماتی است و بنابراین تابعِ $f(n) = g(n,n)$ هم بازگشتی_مقدّماتی است.

(د) (۱۵نمره) برنامه‌ای بنویسید که تابعِ f در بند قبل را محاسبه کند. در این برنامه فقط از مَکروهایِ $V'' \leftarrow V + V'$، $V'' \leftarrow V.V'$ و $GOTO\ \ L$ می‌توانید استفاده کنید.

جواب. ابتدا برنامه را با استفاده از مَکرو می‌نویسیم و سپس جایگزین می‌کنیم:

$$
\begin{array}{ll}
 & Y \leftarrow ۱ \\
 & Z_۱ \leftarrow X \\
[A_۱] & IF\ Z_۱ \neq ۰\ GOTO\ B_۱ \\
 & GOTO\ E \\
[B_۱] & Z_۱ \leftarrow Z_۱ - ۱ \\
 & Y \leftarrow X^Y \\
 & GOTO\ A_۱
\end{array}
$$

حالا $X^Y \leftarrow Y$ را با یک حلقه جایگزین میکنیم که مقدارِ X^Y را در متغیّر $Z_۲$ ذخیره می‌کند:

$$
\begin{array}{ll}
 & Y \leftarrow ۱ \\
 & Z_۱ \leftarrow X \\
[A_۱] & IF\ Z_۱ \neq ۰\ GOTO\ B_۱ \\
 & GOTO\ E \\
[B_۱] & Z_۱ \leftarrow Z_۱ - ۱ \\
 & Z_۲ \leftarrow ۱ \\
 & Z_۳ \leftarrow Y \\
[A_۲] & IF\ Z_۳ \neq ۰\ GOTO\ D_۱ \\
 & GOTO\ C_۱ \\
[D_۱] & Z_۲ \leftarrow Z_۲ . X \\
 & Z_۳ \leftarrow Z_۳ - ۱ \\
 & GOTO\ A_۲ \\
[C_۱] & Y \leftarrow Z_۲ \\
 & GOTO\ A_۱
\end{array}
$$

و نهایتاً استفاده از مَکروهای $V \leftarrow V'$ و همچنین $V \leftarrow ۰, ۱$ را با کمکِ متغیّر $Z_۴$ حذف می‌کنیم:

$$
\begin{array}{ll}
 & Z_۵ \leftarrow Z_۵ + ۱ \\
 & Y \leftarrow Y + ۱ \\
 & Z_۱ \leftarrow X + Z_۴ \\
[A_۱] & IF\ Z_۱ \neq ۰\ GOTO\ B_۱ \\
 & GOTO\ E \\
[B_۱] & Z_۱ \leftarrow Z_۱ - ۱ \\
 & Z_۲ \leftarrow Z_۴ + Z_۵ \\
 & Z_۳ \leftarrow Y + Z_۴ \\
[A_۲] & IF\ Z_۳ \neq ۰\ GOTO\ D_۱ \\
 & GOTO\ C_۱ \\
[D_۱] & Z_۲ \leftarrow Z_۲ . X \\
 & Z_۳ \leftarrow Z_۳ - ۱ \\
 & GOTO\ A_۲ \\
[C_۱] & Y \leftarrow Z_۲ + Z_۴ \\
 & GOTO\ A_۱
\end{array}
$$

توضیحات: در برنامه‌ی بالا متغیّر $Z_۴$ نقش ثابتِ صفر را بازی می‌کند یعنی در سرتاسر برنامه همواره صفر است و همچنین متغیّر $Z_۵$ نقش ۱ را بازی می‌کند.

(ه) (۵نمره) ارتباط بین توابعِ محاسبه‌پذیر و کلاسِ PRC چیست؟

جواب. مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ محاسبه‌پذیر، یک PRC کلاس است.

۵. (آ) (۱۰نمره) حکم قضیه‌ی universal را برای توابع بازگشتی‌ـمقدّماتی بیان کنید.

جواب. فرض کنید $\ulcorner . \urcorner$ یک کُدگذاری برای توابعِ بازگشتی‌ـمقدّماتی باشد. یعنی به هر تابعِ بازگشتی‌ـمقدّماتی مثلِ f یک عددِ یکتا مثل $\ulcorner f \urcorner$ نسبت دهد. و حالا حکم قضیه‌ی Universal برای توابعِ بازگشتی‌ـمقدّماتی به این صورت قابل بیان است: «برایِ هر عددِ طبیعی مثل n، یک تابع مثل $\varphi^n : \mathbb{N}^{n+۱} \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود است طوری‌که برای هر تابعِ nـ متغیّره‌ی بازگشتی‌ـمقدّماتی مثل f و هر دنباله‌ی nـ تایی از اعداد طبیعی مثل $\bar{x}$ داشته باشیم:

$$\varphi^n(\bar{x}, \ulcorner f \urcorner) = f(\bar{x})$$

(ب) (۲۰نمره) این حکم معتبر است؟ ادّعای خود را ثابت کنید.

جواب. خیر معتبر نیست. با استدلالِ قطری نشان می‌دهیم که $\varphi^{۱}$ نمی‌تواند وجود داشته باشد. فرض کنید $\varphi^{۱}$ یک تابعِ بازگشتی‌ـ‌مقدّماتی باشد. در این صورت تابعِ $g(x) := ۱ + \varphi^{۱}(x,x)$ نیز بازگشتی‌ـ‌مقدّماتی است. پس داریم:

$$\varphi^{۱}(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = g(\ulcorner g \urcorner) = ۱ + \varphi^{۱}(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) \quad \Rightarrow \quad ۰ = ۱$$

این تناقض نشان می‌دهد که فرض بازگشتی‌ـ‌مقدّماتی بودنِ $\varphi^{۱}$ غلط است.

موفق باشید.