بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: ....

شماره‌ی دانشجویی: ....

تاریخ: ۲۸ آذر ۱۳۹۶

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

مدرس: مجتهدی

آزمون میان‌ترم دوم نظریه محاسبه

---

۱. (۲۰نمره) عبارت زیر را در نظر بگیرید: (توجّه: $s \simeq t$ برقرار است اگر $t\downarrow$ و $s\downarrow$ و $s = t$ یا این‌که $t\uparrow$ و $s\uparrow$.)

$$\exists k \forall m \forall n \forall i \forall j \ \left[\varphi_k^{(2)}(n,m)\downarrow \wedge\ \varphi^{(2)}_{\varphi_k^{(2)}(n,m)}(i,j) \simeq \varphi_n(i).\varphi_m(j)\right]$$

(آ) صورت ساده‌ی (غیر مؤثر) این حکم را بیان کنید.

جواب. برای هر دو تابعِ محاسبه‌پذیر f و g، تابعِ $f(i).g(j)$ یک تابع محاسبه‌پذیر است.

(ب) آیا صورت مؤثر بیان شده در سؤال معتبر است؟ استدلال بیاورید.

جواب. بله. اثبات حکم آن به کمک قضیه‌ی پارامتر (s-m-n) انجام می‌شود. در واقع کافیست نشان دهیم که یک تابعِ محاسبه‌پذیر تام مثل $k(n,m)$ موجود است طوری‌که برای هر n, m, i, j داشته باشیم:

$$\varphi_{k(n,m)}(i,j) = \varphi_n(i).\varphi_m(j)$$

ابتدا تابعِ h را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(n,m,i,j) := \varphi_n(i).\varphi_m(j)$$

واضح است که h تابعی محاسبه‌پذیر است. بنابراین طبق قضیّه‌ی s-m-n d یک تابع محاسبه‌پذیر تام مثل k موجود است طوری‌که برای هر n, m, i, j داریم: $\varphi_{k(n,m)}(i,j) = h(n,m,i,j)$ و این همان حکم مورد نظر است.

۲. (۳۰نمره) گوییم زیرمجموعه‌ی I از اعداد طبیعی به اندیس احترام می‌گذارد اگر برای هر $i \in I$ و $j \in \mathbb{N}$ که $\varphi_i \simeq \varphi_j$ داشته باشیم $j \in I$.

(آ) نشان دهید این حکم با قضیه‌ی رایس معادل است: «اگر $I \subseteq \mathbb{N}$ تصمیم‌پذیر باشد و به اندیس احترام بگذارد، I بدیهی است، یعنی تهی است یا برابر با $\mathbb{N}$ است.»

جواب. اوّلاً توجّه کنید که «I به اندیس احترام‌می‌گذارد» معادل است با این‌که بگوییم «برای هر i, j که $\varphi_i \simeq \varphi_j$، یا $i, j \in I$ یا این‌که $i, j \notin I$».

اثبات این‌که حکم بالا قضیّه‌ی رایس را نتیجه می‌دهد:

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از تابع‌های محاسبه‌پذیر روی $\mathbb{N}$ باشد و $I_{\mathcal{F}} := \{n \in \mathbb{N} : \varphi_n \in \mathcal{F}\}$ یک مجموعه‌ی تصمیم‌پذیر باشد. در این‌صورت از تعریف $I_{\mathcal{F}}$ واضح است که $I_{\mathcal{F}}$ به اندیس احترام می‌گذارد. پس $I_{\mathcal{F}}$ بدیهی است.

اثبات این‌که قضیّه‌ی رایس حکم بالا را نتیجه می‌دهد:

فرض کنید I یک زیرمجموعه از اعداد طبیعی باشد که به اندیس احترام می‌گذارد. قرار دهید $\mathcal{F} := \{\varphi_i : i \in I\}$. نشان می‌دهیم $I_{\mathcal{F}} = I$ (برای تعریف $I_{\mathcal{F}}$ به چند سطر بالاتر مراجعه کنید). عدد دل‌خواه i را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم $i \in I$ اگر و فقط اگر $i \in I_{\mathcal{F}}$. ابتدا فرض کنید $i \in I$. در این صورت طبق تعریف $\mathcal{F}$ داریم $\varphi_i \in \mathcal{F}$. حالا از تعریف $I_{\mathcal{F}}$ داریم $i \in I_{\mathcal{F}}$. برای طرف دیگر فرض کنید $i \in I_{\mathcal{F}}$. بنابراین $\varphi_i \in \mathcal{F}$. توجّه کنید که این‌جا مستقیماً نمی‌شود نتیجه گرفت که $i \in I$! این نتیجه می‌دهد که $j \in I$ موجود است طوری‌که $\varphi_i \simeq \varphi_j$. حالا چون I به اندیس احترام می‌گذارد می‌توان نتیجه گرفت که $i \in I$. این اثبات $I = I_{\mathcal{F}}$ را کامل می‌کند. حالا می‌توان از قضیّه‌ی رایس نتیجه گرفت که $I_{\mathcal{F}}$ بدیهی است، یا به عبارت دیگر I بدیهی است.

(ب) قضیه‌ی نقطه‌ثابت را بیان کنید.

جواب. برای هر تابعِ محاسبه‌پذیر تام مثل $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$، عددی مثل e موجود است طوری‌که $\varphi_{f(e)} \simeq \varphi_e$.

(ج) به کمک قضیه‌ی نقطه‌ثابت و با استفاده از تابعِ $f(x) := \begin{cases} a & : x \in I \\ b & : x \notin I \end{cases}$ حکم بند (آ) را اثبات کنید، که در آن $a \notin I$ و $b \in I$.

جواب. فرض کنید که I بازگشتی باشد و به اندیس احترام بگذارد و نابدیهی هم باشد. بنابراین اعداد a, b هستند که $b \in I$ و $a \notin I$. تابعِ f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) := \begin{cases} a & : x \in I \\ b & : x \notin I \end{cases}$$

واضح است که f محاسبه‌پذیر تام است. بنابراین، طبق قضیه‌ی نقطه‌ثابت، عددی مثل e هست طوری‌که $\varphi_{f(e)} \simeq \varphi_e$. از

طرفی، تعریف f نتیجه می‌دهد که $e \in I$ اگر و فقط اگر $f(e) \notin I$. بنابراین I به اندیس احترام نمی‌گذارد که با فرض در تناقض است.

۳. (۴۰نمره) از مجموعه‌های زیر کدام یک .r.e است؟ کدام‌یک .r.e نیست؟ بدون کمک گرفتن از قضایای رایس و رایس_شاپیرو مستقیماً ادعای خود را ثابت کنید:

(آ) $A := \{i \in \mathbb{N} : \text{تام نیست } \varphi_i\}$

جواب. این مسأله شمارش‌پذیر بازگشتی نیست. برای اثبات این موضوع نشان می‌دهیم که $\bar{K}$ به این مسأله تحویل‌پذیر است. تابعِ $g(n, m)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(n,m) := \begin{cases} 0 & : \varphi_n(n) \downarrow \\ \uparrow & : \varphi_n(n) \uparrow \end{cases}$$

واضح است که g محاسبه‌پذیر است. پس طبق قضیه‌ی s-m-n تابع محاسبه‌پذیر تامِ k موجود است طوری‌که برای هر m, n داریم $\varphi_{k(n)}(m) = g(n, m)$. بنابراین برای هر n داریم «$\varphi_{k(n)}$ تام است» اگر و فقط اگر «$\varphi_n(n)\downarrow$». به عبارت دیگر «$k(n) \in A$» اگر و فقط اگر «$n \in \bar{K}$». بنابراین $\bar{K} \leq A$. حالا چون می‌دانیم $\bar{K}$ شمارش‌پذیر بازگشتی نیست، نتیجه می‌گیریم که A نیز شمارش‌پذیر بازگشتی نیست.

(ب) $B := \{n \in \mathbb{N} : E_n \subseteq W_n\}$

جواب. این مسأله شمارش‌پذیر بازگشتی نیست. برای اثبات این موضوع نشان می‌دهیم که $\bar{K}$ به این مسأله تحویل‌پذیر است. تابعِ $g(n, m)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(n,m) := \begin{cases} 0 & : \varphi_n(n) \downarrow \text{ و } m \neq 0 \\ \uparrow & : \varphi_n(n) \uparrow \text{ یا } m = 0 \end{cases}$$

واضح است که g محاسبه‌پذیر است. پس طبق قضیه‌ی s-m-n تابع محاسبه‌پذیر تامِ k موجود است طوری‌که برای هر m, n داریم $\varphi_{k(n)}(m) = g(n, m)$. حالا برای n داده شده دو حالت داریم. (۱) $\varphi_n(n) \downarrow$: در این صورت $\varphi_{k(n)}$ تابعی است که همه‌جا صفر است مگر در صفر که لوپ می‌زند. بنابراین $E_{k(n)} = \{0\}$ و $W_{k(n)} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$، و بنابراین $E_{k(n)} \not\subseteq W_{k(n)}$. (۲) $\varphi_n(n) \uparrow$: در این صورت $\varphi_{k(n)}$ تابعی است که هیچ جا متوقف نمی‌شود، یا به‌عبارت دیگر $E_{k(n)} = \emptyset \subseteq \emptyset = W_{k(n)}$. بنابراین «$k(n) \in B$» اگر و فقط اگر «$n \in \bar{K}$». بنابراین $\bar{K} \leq B$. حالا چون می‌دانیم $\bar{K}$ شمارش‌پذیر بازگشتی نیست، نتیجه می‌گیریم که B نیز شمارش‌پذیر بازگشتی نیست.

(ج) $C := \{n \in \mathbb{N} : W_n \subseteq E_n\}$

جواب. این مسأله شمارش‌پذیر بازگشتی نیست. برای اثبات این موضوع نشان می‌دهیم که $\bar{K}$ به این مسأله تحویل‌پذیر است.

$$g(n,m) := \begin{cases} ۰ & : \varphi_n(n)\downarrow \text{ و } m \neq ۰ \\ \uparrow & : \varphi_n(n)\uparrow \text{ یا } m = ۰ \end{cases}$$

واضح است که g محاسبه‌پذیر است. پس طبق قضیه‌ی s-m-n تابع محاسبه‌پذیر تامِ k موجود است طوری‌که برای هر m, n داریم $\varphi_{k(n)}(m) = g(n,m)$. حالا برای n داده شده دو حالت داریم. (۱) $\varphi_n(n)\downarrow$: در این صورت $\varphi_{k(n)}$ تابعی است که همه‌جا صفر است مگر در صفر که لوپ می‌زند. بنابراین $E_{k(n)} = \{۰\}$ و $W_{k(n)} = \mathbb{N} \setminus \{۰\}$، و بنابراین $W_{k(n)} \not\subseteq E_{k(n)}$. (۲) $\varphi_n(n)\uparrow$: در این صورت $\varphi_{k(n)}$ تابعی است که هیچ جا متوقف نمی‌شود، یا به‌عبارت دیگر $W_{k(n)} = \emptyset \subseteq \emptyset = E_{k(n)}$. بنابراین «$k(n) \in C$» اگر و فقط اگر «$n \in \bar{K}$». بنابراین $\bar{K} \leq C$. حالا چون می‌دانیم $\bar{K}$ شمارش‌پذیر بازگشتی نیست، نتیجه می‌گیریم که C نیز شمارش‌پذیر بازگشتی نیست.

(د) $D := \{n \in \mathbb{N} : \text{ نامتناهی است } W_n\}$

جواب. این مسأله شمارش‌پذیر بازگشتی نیست. برای اثبات این موضوع نشان می‌دهیم که $\bar{K}$ به این مسأله تحویل‌پذیر است.

$$g(n,m) := \begin{cases} \uparrow & : \text{ در حداکثر } m \text{ استپ متوقف می‌شود } \varphi_n(n) \\ ۰ & : \text{ در حداکثر } m \text{ استپ متوقف نمی‌شود } \varphi_n(n) \end{cases}$$

واضح است که g محاسبه‌پذیر است. پس طبق قضیه‌ی s-m-n تابع محاسبه‌پذیر تامِ k موجود است طوری‌که برای هر m, n داریم $\varphi_{k(n)}(m) = g(n,m)$. حالا برای n داده شده دو حالت داریم. (۱) $\varphi_n(n)\downarrow$: مثلاً فرض کنید $\varphi_n(n)$ در استپ iـام متوقف شود. در این صورت $\varphi_{k(n)}$ تابعی است که همه‌جا لوپ می‌زند است مگر در متناهی عدد آغازین که صفر است. بنابراین $W_{k(n)} = \{۰, ۱, \ldots, i-۱\}$، و بنابراین $W_{k(n)}$ متناهی است. (۲) $\varphi_n(n)\uparrow$: در این صورت $\varphi_{k(n)}$ تابعی است که همه‌جا متوقّف می‌شود و بنابراین $W_{k(n)}$ نامتناهی است. بنابراین «$k(n) \in D$» اگر و فقط اگر «$n \in \bar{K}$». بنابراین $\bar{K} \leq D$. حالا چون می‌دانیم $\bar{K}$ شمارش‌پذیر بازگشتی نیست، نتیجه می‌گیریم که D نیز شمارش‌پذیر بازگشتی نیست.