بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: ....

شماره‌ی دانشجویی: ....

تاریخ: ۹ آبان ۱۳۹۶

مدت امتحان: ۴۵ دقیقه

مدرس: مجتهدی

آزمون میان ترم نظریه محاسبه

۱. (۳۰نمره) فرض کنید L_1 و L_2 دو مسأله‌ی به‌طور بازگشتی شمارا باشند. r.e. بودن یا نبودن هر یک از مسائل زیر را مشخّص کنید و ادّعای خود را اثبات کنید.

(آ) (۱۰نمره) $L_1 \cup L_2$،

جواب. نشان می‌دهیم $L_1 \cup L_2$ r.e. است. با توجّه به این‌که L_1 و L_2 دو مسأله‌ی به‌طور بازگشتی شمارا هستند، می‌توانیم نتیجه بگیریم الگوریتم‌های تصمیم یک‌طرفه‌ای مثل A_1 و A_2 برای L_1 و L_2 موجودند. با توجّه به قضایای اثبات شده، کافیست الگوریتمی بدهیم که برای $L_1 \cup L_2$ به‌طور یک طرفه تصمیم بگیرد، یا به عبارتی یک پذیرنده برای آن باشد. الگوریتم برای ورودی w به این‌صورت کار می‌کند: «الگوریتم‌های A_1 و A_2 را به‌صورت موازی روی w اجرا می‌کنیم. در صورتی که هر کدام از این دو، رشته‌ی w را پذیرفت، محاسبه را به اتمام می‌رسانیم و رشته‌ی w را می‌پذیریم.»

(ب) (۱۰نمره) $L_1 \setminus L_2$،

جواب. این زبان r.e. نیست. برای اثبات این موضوع کافیست مثال نقض بیاوریم. کافیست L_2 را برابر با یک مجموعه‌ی تصمیم‌ناپذیر که r.e. هست (مثل مسأله‌ی توقّف) قرار دهیم و L_1 را برابر با مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌ها (روی همان الفبای L_2) قرار دهیم. در این صورت اگر $L_1 \setminus L_2$ یا همان مکمّل L_2 تصمیم‌پذیر یک‌طرفه باشد، طبق قضیه ثابت شده در کلاس می‌توانیم نتیجه بگیریم L_2 تصمیم‌پذیر است، که البته این تناقض است. پس $L_1 \setminus L_2$ تصمیم‌پذیر یک‌طرفه نیست.

(ج) (۱۰نمره) $L_1 \cap L_2$.

جواب. نشان می‌دهیم $L_1 \cap L_2$ r.e. است. با توجّه به این‌که L_1 و L_2 دو مسأله‌ی به‌طور بازگشتی شمارا هستند، می‌توانیم نتیجه بگیریم الگوریتم‌های تصمیم یک‌طرفه‌ای مثل A_1 و A_2 برای L_1 و L_2 موجودند. با توجّه به قضایای اثبات شده، کافیست الگوریتمی بدهیم که برای $L_1 \cap L_2$ به‌طور یک طرفه تصمیم بگیرد، یا به عبارتی یک پذیرنده برای آن باشد. الگوریتم برای ورودی w به این‌صورت کار می‌کند: «الگوریتم A_1 را روی w اجرا می‌کنیم. در صورتی که رشته‌ی w را پذیرفت، الگوریتم A_2 را روی w اجرا می‌کنیم و نتیجه‌ی آن را در خروجی الگوریتم چاپ می‌کنیم.»

۲. (۲۰نمره) E_{CFG} را تعریف کنید و ثابت کنید تصمیم‌پذیر است. (توجّه: در صورتی‌که از قضایای دیگر استفاده می‌کنید، آن‌ها را بیان و اثبات کنید.)

جواب. به کتابِ «Sipser, Michael. Introduction to the Theory of Computation (3 ed.).» قضیّه‌ی 4.8 صفحه‌ی ۱۹۹ مراجعه کنید.

۳. (۲۰ نمره) (آ) (۱۰ نمره) ثابت کنید L تصمیم‌پذیر یک‌طرفه است اگر زبان تصمیم‌پذیرِ L' موجود باشد طوری‌که

$$L = \{w : \exists x \, \langle w, x\rangle \in L'\}$$

جواب. فرض کنید L' تصمیم‌پذیر باشد (با الگوریتم تصمیم A') و $L = \{w : \exists x \, \langle w, x\rangle \in L'\}$. نشان می‌دهیم L تصمیم‌پذیر یک‌طرفه است. فرض کنید رشته‌ی w داده شده است. الگوریتم زیر را برای تصمیم‌گیریِ یک‌طرفه‌ی آن داریم:

۱. ابتدا قرار بده $n := ۰$.

۲. الگوریتم A' را روی $\langle w, x_n\rangle$ اجرا کن. اگر جواب مثبت بود، جواب را در خروجی چاپ کن و از برنامه خارج شو. در غیر این‌صورت به مرحله‌ی بعد برو.

۳. قرار بده $n := n + ۱$ و به مرحله‌ی **۲** برو.

در الگوریتمِ بالا، $x_۰, x_۱, \ldots x_n, \ldots$ یک شمارش مؤثر (محاسبه‌پذیر) از رشته‌های موجود در الفبا است که می‌دانیم چنین شماره‌گذاریِ مؤثری حتما برای هر الفبای متناهی وجود دارد.

(ب) (۱۰ نمره) آیا عکس این حکم نیز برقرار است؟ ادّعای خود را ثابت کنید.

جواب. عکس حکم بالا هم برقرار است. برای اثبات این موضوع، فرض کنید L یک زبانِ تصمیم‌پذیر یک‌طرفه باشد طوری‌که ماشین تورینگِ T آن را می‌پذیرد. نشان می‌دهیم، زبانِ L' تصمیم‌پذیر موجود است طوری‌که $L = \{w : \exists x \, \langle w, x\rangle \in L'\}$.
زبانِ L' را شاملِ همه‌ی زوج‌مرتب‌هایی مثل $\langle w, x\rangle$ در نظر بگیرید که x یک محاسبه‌ی پایان‌یافته در ماشین تورینگ T با ورودیِ w است که در انتهای محاسبه، رشته‌ی w را می‌پذیرد. منظور از محاسبه‌ی x می‌تواند این‌گونه باشد: دنباله‌ی تغییر configuration برای ماشین تورینگ T با شروع از وضعیت آغازین و رشته‌ی w روی tape و منتهی به وضعیّت accept، که به‌وضوح در یک الفبای متناهی قابل بیان است. با این تعریف واضح است که L' تصمیم‌پذیر است و $L = \{w : \exists x \, \langle w, x\rangle \in L'\}$.