

اثبات تورینگ- کامل نبودن URM'

مدرس: دکتر مجتهدی

تعریف. تابع $one : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$one(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

واضح است که تابع one با توان محاسباتی URM قابل محاسبه است. در این گردایه قصد داریم نشان دهیم این تابع با توان محاسباتی URM' قابل محاسبه نیست. ابتدا تعاریف و لم‌هایی که نیاز داریم را معرفی و اثبات می‌کنیم.

تعریف. برای هر وضعیت یک ماشین مانند $\langle r_1, \dots, r_n, 0, \dots \rangle$ ، وضعیت علامت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\langle sgn(r_1), \dots, sgn(r_n), 0, \dots \rangle$$

لم. اگر P یک برنامه دلخواه URM' باشد و a و b ناصفر باشند، $sgn(f_P(a)) = sgn(f_P(b))$.
برهان. ابتدا حکم را قوی‌تر کرده و سپس به کمک استقرا روی تعداد مراحل اجرای P (و نه تعداد دستورات) آن را ثابت می‌کنیم. ادعا می‌کنیم اگر تاکنون n مرحله روی هر یک از دو ورودی اجرا شده باشد، اولاً در هر دو حالت دستوری که در مرحله بعد اجرا می‌شود در خط یکسانی از برنامه P قرار دارد، دوماً در هر دو حالت وضعیت علامت ماشین یکسان است. در حالت پایه ($n = 0$) می‌دانیم دستوری که در مرحله بعد اجرا می‌شود در خط اول قرار دارد و وضعیت علامت هر دو به صورت $\langle 1, 0, 0, \dots \rangle$ است. برای حالت گام فرض می‌کنیم پس از اجرای $n - 1$ مرحله روی هر یک از دو ورودی، هر دو وضعیت علامت با هم برابرند و دستوری که در مرحله n -ام اجرا می‌شود در خط l -ام قرار دارد.

– اگر این دستور $S(k)$ باشد، دستور بعدی در خط $l + 1$ قرار دارد و تغییرات تنها روی r_k اعمال خواهد شد و قطعاً $sgn(r_k)$ پس از اجرای این دستور برابر با یک می‌شود لذا همچنان هر دو وضعیت علامت با هم برابر می‌مانند و دستوری که در مرحله بعد اجرا می‌شود یکسان است.

– اگر این دستور $Z(k)$ باشد، دستور بعدی در خط $l + 1$ قرار دارد و تغییرات تنها روی r_k اعمال خواهد شد و قطعاً $sgn(r_k)$ پس از اجرای این دستور برابر با صفر می‌شود لذا همچنان هر دو وضعیت علامت با هم برابر می‌مانند و دستوری که در مرحله بعد اجرا می‌شود یکسان است.

– اگر این دستور $J'(k, l')$ باشد، دو حالت برای $sgn(r_k)$ داریم. اگر صفر باشد در هر دو حالت صفر است و دستور بعدی در خط $l + 1$ قرار دارد و اگر یک باشد در هر دو حالت یک است و دستور بعدی در خط l' قرار دارد. همچنین تغییراتی روی وضعیت علامت اعمال نمی‌شود و حکم استقرا برقرار است.

با توجه به اثبات ادعا به کمک استقرا اکنون حکم مطرح شده در لم بدیهتاً برقرار است.

قضیه. تابع one با توان محاسباتی URM' قابل محاسبه نیست.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم ONE برنامه‌ای برای محاسبه‌ی one باشد. پس $f_{ONE} = one$.
به کمک لم ثابت‌شده می‌دانیم $sgn(one(1)) = sgn(one(2))$. با توجه به تعریف one نتیجه می‌گیریم $sgn(1) = sgn(0)$ یعنی $1 = 0$ که تناقض است.

کامیار میرزاویری

۶۱۰۳۹۶۱۵۲