به نام خدا

اثبات معادل بودن حساب لاندا و گودل- کلینی

عنوان درس:

نظریه محاسبه

استاد درس:

دکتر مجتبی مجتهدی

گردآوری:

کامیار میرزاوزیری

پاییز ۹۸

چکیده

در این گردایه ابتدا معرفی کوتاهی از دو مدل محاسباتی حساب لاندا و گودل-کلینی ارائه می‌دهیم و سپس به اثبات معادل بودن این دو مدل می‌پردازیم.

۱ حساب لاندا

در این بخش به معرفی سطحی حساب لاندا بسنده می‌کنیم و از بیان تعاریف دقیق صرف نظر می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. کوچکترین مجموعه‌ای مانند X که خواص زیر را داشته باشد *مجموعه‌ی عبارت‌های معتبر حساب لاندا* می‌نامیم و با TER_λ نمایش می‌دهیم.

$$
\begin{array}{ll}
i) & \{x_0, x_1, \dots\} \subseteq X \\
ii) & A \in X \wedge B \in X \Rightarrow (A.B) \in X \\
iii) & x \in \{x_0, x_1, \dots\} \wedge A \in X \Rightarrow (\lambda x.A) \in X
\end{array}
$$

اگر دو عبارت A و B اعضای TER_λ باشند، منظور ما از $A = B$ این است که A و B مفهوم یکسانی دارند و لزومی ندارد دقیقا برابر باشند. همچنین از دیگر ساده‌سازی‌های ما استفاده از حروف کوچک لاتین به جای $x_0, x_1, \dots$، پرهیز از نوشتن پرانتزهای غیرضروری، به کار بردن کلمه تابع به جای تابع جزئی و استفاده از نماد $=$ به جای $\simeq$ می‌باشد. همچنین در تعریف زیر و بعد از آن، منظور از $\lambda x_1.\lambda x_2.\dots.\lambda x_n.A$ همان $\lambda x_1.(\lambda x_2.\dots.(\lambda x_n.A))$ و منظور از $F.X_1.X_2.\dots.X_n$ همان $(\dots((F.X_1).X_2).\dots.X_n)$ است.

تعریف ۲.۱. برای هر $n \in \mathbb{N}$ عبارت $C_n \in \mathrm{TER}_\lambda$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$
C_n = \begin{cases} \lambda f.\lambda t.t & n = 0 \\ \lambda f.\lambda t.(f.(C_{n-1}.f.t)) & else \end{cases}
$$

تعریف ۳.۱. تابع $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ را λ-*محاسبه‌پذیر* گوییم هرگاه عبارتی مانند F در TER_λ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $(a_1, \dots, a_n)$ در دامنه f داشته باشیم

$$F.C_{a_1}.C_{a_2}.\dots.C_{a_n} = C_{f(a_1,\dots,a_n)}.$$

و برای هر $(a_1, \dots, a_n)$ که در دامنه f نباشد عبارت $F.C_{a_1}.C_{a_2}.\dots.C_{a_n}$ قابل ساده کردن به یک C_b نباشد. همچنین *مجموعه‌ی همه‌ی توابع* λ-*محاسبه‌پذیر* را با $\Lambda\mathrm{C}$ نمایش می‌دهیم.

۲ گودل- کلینی

در این بخش به بیان دقیق مدل محاسباتی گودل- کلینی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. دو تابع $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ و $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ و خانواده توابع $U_i^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و مجموعه شامل همه این توابع را مجموعه *توابع پایه* می‌نامیم و با ZSU نمایش می‌دهیم.

$$Z(a) = ۰$$

$$S(a) = a + ۱$$

$$U_i^{(n)}(a_۱, \dots, a_n) = a_i$$

تعریف ۲.۲. اگر f تابعی $\mathbb{N}^k$ به $\mathbb{N}$ و $G = (g_۱, \dots, g_k)$ یک k-تایی مرتب از توابع $\mathbb{N}^n$ به $\mathbb{N}$ باشد، *ترکیب* f و G که آن را با $f \circ G$ نشان می‌دهیم تابعی $\mathbb{N}^n$ به $\mathbb{N}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود. (برای سادگی $a_۱, \dots, a_n$ را با $\bar{a}$ نشان می‌دهیم)

$$(f \circ G)(\bar{a}) = f(g_۱(\bar{a}), \dots, g_k(\bar{a}))$$

تعریف ۳.۲. اگر $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ و $g : \mathbb{N}^{n+۲} \to \mathbb{N}$ دو تابع باشند، *تابع بازگشتی- مقدماتی ساخته‌شده از روی* f و g که آن را با $\eta_{f,g}$ نشان می‌دهیم تابعی $\mathbb{N}^{n+۱}$ به $\mathbb{N}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود. (برای سادگی $a_۱, \dots, a_n$ را با $\bar{a}$ نشان می‌دهیم)

$$\eta_{f,g}(\bar{a}, t) = \begin{cases} f(\bar{a}) & t = ۰ \\ g(\eta_{f,g}(\bar{a}, t - ۱), \bar{a}, t - ۱) & else \end{cases}$$

تعریف ۴.۲. اگر $f : \mathbb{N}^{n+۱} \to \mathbb{N}$ یک تابع باشد، *کمینه‌سازی نامحدود* f که آن را با μ_f نشان می‌دهیم تابعی $\mathbb{N}^n$ به $\mathbb{N}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود. (برای سادگی $a_۱, \dots, a_n$ را با $\bar{a}$ نشان می‌دهیم)

$$\mu_f(\bar{a}) = \mu t.(f(\bar{a}, t) = ۰)$$

در تعریف زیر $f^{(n)}$ یعنی تابع f یک تابع با n ورودی است، همچنین $F^{(k,n)}$ یعنی F یک k-تایی مرتب از توابعی با n ورودی است.

تعریف ۵.۲. کوچکترین مجموعه‌ای مانند X که خواص زیر را داشته باشد مجموعه‌ی *همه‌ی توابع محاسبه‌پذیر گودل-کلینی* می‌نامیم و با GK نمایش می‌دهیم.

$$
\begin{array}{ll}
i) & \mathrm{ZSU} \subseteq X \\
ii) & f^{(k)} \in X \wedge G^{(k,n)} \subseteq X \Rightarrow f \circ G \in X \\
iii) & f^{(n)} \in X \wedge g^{(n+۲)} \in X \Rightarrow \eta_{f,g} \in X \\
iv) & f^{(n+۱)} \in X \Rightarrow \mu_f \in X
\end{array}
$$

همچنین هر عضو این مجموعه را یک *تابع محاسبه‌پذیر گودل-کلینی* می‌نامیم.

۳ اثبات معادل بودن

در این بخش نشان می‌دهیم توان محاسباتی هیچ یک از این دو مدل محاسباتی از مدل دیگر کمتر نیست.

لم ۱.۳. *توابع Z، S و $U_i^{(n)}$ توابعی λ-محاسبه‌پذیر هستند. به عبارت دیگر $ZSU \subseteq \Lambda C$.*

برهان. برای تابع Z، عبارت $F_Z = \lambda x.C_۰$، برای تابع S، عبارت $F_S = \lambda x.\lambda f.\lambda t.(f.(x.f.t))$ و برای تابع $U_i^{(n)}$، عبارت $F_{U_i^{(n)}} = \lambda x_۱.\lambda x_۲.\ldots.\lambda x_n.x_i$ را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هرکدام عبارت مناسبی برای تابع مربوطه هستند. برای F_Z داریم

$$
\begin{aligned}
F_Z.C_a &= (\lambda x.C_۰).C_a \\
&= C_۰ \\
&= C_{Z(a)}.
\end{aligned}
$$

و برای F_S داریم

$$
\begin{aligned}
F_S.C_a &= (\lambda x.\lambda f.\lambda t.(f.(x.f.t))).C_a \\
&= \lambda f.\lambda t.(f.(C_a.f.t)) \\
&= C_{a+۱} \\
&= C_{S(a)}.
\end{aligned}
$$

در انتهای برای $F_{U_i^{(n)}}$ داریم

$$\begin{aligned} F_{U_i^{(n)}}.C_{a_1}.C_{a_2}.\dots.C_{a_n} &= (\lambda x_1.\lambda x_2.\dots.\lambda x_n.x_i).C_{a_1}.C_{a_2}\dots.C_{a_n} \\ &= C_{a_i} \\ &= C_{U_i^{(n)}(a_1,\dots,a_n)}. \end{aligned}$$

■

در ادامه عبارت‌های F_Z، F_S و $F_{U_i^{(n)}}$ را برای اشاره به عبارات معرفی‌شده در برهان قبلی به کار می‌بریم.

لم ۲.۳. *اگر $f^{(k)}$ تابعی λ-محاسبه‌پذیر و $G^{(k,n)}$ یک k-تایی از توابع λ-محاسبه‌پذیر باشد $f \circ G$ نیز λ-محاسبه‌پذیر است. به عبارت دیگر* $f^{(k)} \in \Lambda C \wedge G^{(k,n)} \subseteq \Lambda C \Rightarrow f \circ G \in \Lambda C$.

برهان. با توجه به فرض، عبارات F و $G_1,\dots,G_k$ برای توابع f و $g_1,\dots,g_k$ موجودند. عبارت H را به صورت زیر معرفی می‌کنیم. (عبارات را طوری تغییر می‌دهیم که F متغیر اتمی مشترکی با G_iها نداشته باشد.)

$$H = \lambda x_1.\lambda x_2\dots\lambda x_n.(F.(G_1.x_1\dots x_n)\dots(G_k.x_1\dots x_n))$$

داریم

$$\begin{aligned} H.C_{a_1}\dots C_{a_n} &= (\lambda x_1.\lambda x_2\dots\lambda x_n.(F.(G_1.x_1\dots x_n)\dots(G_k.x_1\dots x_n))).C_{a_1}\dots C_{a_n} \\ &= F.(G_1.C_{a_1}\dots C_{a_n})\dots(G_k.C_{a_1}\dots C_{a_n}) \\ &= F.C_{g_1(\bar{a})}\dots C_{g_k(\bar{a})} \\ &= C_{f(g_1(\bar{a}),\dots,g_k(\bar{a}))} \\ &= C_{f\circ G(\bar{a})}. \end{aligned}$$

■

در ادامه قصد داریم k عبارت را در یک عبارت کد کنیم. به بیان دقیق‌تر می‌خواهیم K_k یک عبارت باشد به طوری که $K_{(X_1,\dots,X_k)} = K_k.X_1.\dots.X_k$ عبارت متناظر با k-تایی مرتب $(X_1,\dots,X_k)$ باشد. (در تعاریف زیر فرض بر این است که X_iها متغیر اتمی مشترکی با K_k ندارند.)

تعریف ۳.۳. دو عبارت F_{sgn} و $F_{\overline{sgn}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و به ترتیب λ-علامت و λ-وارون می‌نامیم.

$$\begin{aligned} F_{\overline{sgn}} &= \lambda c.(c.F_Z.C_1) \\ F_{sgn} &= \lambda c.(F_{\overline{sgn}}.(F_{\overline{sgn}}.c)). \end{aligned}$$

لم ۴.۳. *برای هر $a \in \mathbb{N}$ داریم*

$$\begin{aligned} F_{\overline{sgn}}.C_a &= C_{\overline{sgn}(a)} \\ F_{sgn}.C_a &= C_{sgn(a)}. \end{aligned}$$

برهان. ابتدا حکم را برای λ-واورن ثابت می‌کنیم. اگر $a = ۰$ داریم

$$\begin{aligned} F_{\overline{sgn}}.C_۰ &= \lambda c.(c.F_Z.C_۱).C_۰ \\ &= C_۰.F_Z.C_۱ \\ &= C_۱ \\ &= C_{\overline{sgn}(۰)}. \end{aligned}$$

و اگر $a > ۰$ داریم

$$\begin{aligned} F_{\overline{sgn}}.C_a &= \lambda c.(c.F_Z.C_۱).C_a \\ &= C_a.F_Z.C_۱ \\ &= C_۰ \\ &= C_{\overline{sgn}(a)}. \end{aligned}$$

همچنین برای λ-علامت داریم

$$\begin{aligned} F_{sgn}.C_a &= (\lambda c.(F_{\overline{sgn}}.(F_{\overline{sgn}}.c))).C_a \\ &= F_{\overline{sgn}}.(F_{\overline{sgn}}.C_a) \\ \text{به کمک قسمت قبل} &= F_{\overline{sgn}}.(C_{\overline{sgn}(a)}) \\ \text{به کمک قسمت قبل} &= C_{\overline{sgn}(\overline{sgn}(a))} \\ &= C_{sgn(a)}. \end{aligned}$$

■

تعریف ۵.۳. عبارت K_k را به صورت زیر تعریف کرده و λ-k-*تابی‌ساز* می‌نامیم.

$$K_k = \begin{cases} \lambda x_۱.\lambda x_۲.\lambda c.\lambda t.((F_{\overline{sgn}}.c.x_۱).(F_{sgn}.c.x_۲.t)) & k = ۲ \\ \lambda x_۱.\dots.\lambda x_k.(K_۲.(K_{k-۱}.x_۱.\dots.x_{k-۱}).x_k) & else \end{cases}$$

برای بازگردانی X_iها از این کد عبارت $\mathcal{C}_i^k$ را طوری تعریف می‌کنیم که $K_{(X_۱,\dots,X_k)}.\mathcal{C}_i^k$ همان X_i باشد.

تعریف ۶.۳. عبارت $\mathcal{C}_i^k$ را به صورت زیر تعریف کرده و λ-*افکنش* i-*امین عنصر از* k *عنصر* می‌نامیم.

$$\mathcal{C}_i^k = \begin{cases} C_0 & i = 1 \land k = 2 \\ C_1 & i = k \\ C_0 . \mathcal{C}_i^{k-1} & else \end{cases}$$

لم ۷.۳. *برای هر* $k > 1$ *و* $1 \leq i \leq k$ *و هر* k *عبارت* $X_1, \ldots, X_k$ *داریم*

$$K_{(X_1, \ldots, X_k)} . \mathcal{C}_i^k = X_i.$$

برهان. می‌دانیم $\lambda t(A.t) = A$. چرا که $(\lambda t(A.t)).x = A.x$ یعنی عملکرد این دو عبارت روی هر ورودی دلخواه x یکسان است. ابتدا حالت $i = 1$ و $k = 2$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} K_{(X_1, X_2)} . \mathcal{C}_1^2 &= K_2 . X_1 . X_2 . C_0 \\ &= (\lambda x_1 . \lambda x_2 . \lambda c . \lambda t . ((F_{\overline{sgn}} . c . x_1) . ((F_{sgn} . c . x_2) . t))) . X_1 . X_2 . C_0 \\ &= \lambda t . ((F_{\overline{sgn}} . C_0 . X_1) . (F_{sgn} . C_0 . X_2 . t)) \\ &= \lambda t . ((C_1 . X_1) . (C_0 . X_2 . t)) \\ &= \lambda t . ((C_1 . X_1) . t) \\ &= \lambda t . (X_1 . t) \\ &= X_1. \end{aligned}$$

سپس حالت $i = 2$ و $k = 2$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} K_{(X_1, X_2)} . \mathcal{C}_2^2 &= K_2 . X_1 . X_2 . C_1 \\ &= (\lambda x_1 . \lambda x_2 . \lambda c . \lambda t . ((F_{\overline{sgn}} . c . x_1) . ((F_{sgn} . c . x_2) . t))) . X_1 . X_2 . C_1 \\ &= \lambda t . ((F_{\overline{sgn}} . C_1 . X_1) . (F_{sgn} . C_1 . X_2 . t)) \\ &= \lambda t . ((C_0 . X_1) . (C_1 . X_2 . t)) \\ &= \lambda t . ((C_1 . X_2 . t)) \\ &= \lambda t . (X_2 . t) \\ &= X_2. \end{aligned}$$

اکنون حالت $i = k > ۲$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}
K_{(X_۱,\dots,X_k)}.\mathcal{C}_k^k &= K_k.X_۱.\dots.X_k.C_۱\\
&= (\lambda x_۱.\dots.\lambda x_k.(K_۲.(K_{k-۱}.x_۱.\dots.x_{k-۱}).x_k)).X_۱.\dots.X_k.C_۱\\
&= (K_۲.(K_{k-۱}.X_۱.\dots.X_{k-۱}).X_k).C_۱\\
&= (K_۲.(K_{k-۱}.X_۱.\dots.X_{k-۱}).X_k).\mathcal{C}_۲^۲\\
&= K_{(K_{k-۱}.X_۱.\dots.X_{k-۱},X_k)}.\mathcal{C}_۲^۲\\
\text{با توجه به حالت قبل} &= X_k.
\end{aligned}$$

در انتها برای حالت $k > ۲$ و $i < k$ با استقرا روی k داریم

$$\begin{aligned}
K_{(X_۱,\dots,X_k)}.\mathcal{C}_i^k &= K_k.X_۱.\dots.X_k.C_۰.\mathcal{C}_i^{k-۱}\\
&= (\lambda x_۱.\dots.\lambda x_k.(K_۲.(K_{k-۱}.x_۱.\dots.x_{k-۱}).x_k)).X_۱.\dots.X_k.C_۰.\mathcal{C}_i^{k-۱}\\
&= (K_۲.(K_{k-۱}.X_۱.\dots.X_{k-۱}).X_k).C_۰.\mathcal{C}_i^{k-۱}\\
&= (K_۲.(K_{k-۱}.X_۱.\dots.X_{k-۱}).X_k).\mathcal{C}_۱^۲.\mathcal{C}_i^{k-۱}\\
&= K_{(K_{k-۱}.X_۱.\dots.X_{k-۱},X_k)}.\mathcal{C}_۱^۲.\mathcal{C}_i^{k-۱}\\
\text{با توجه به حالت اول} &= (K_{k-۱}.X_۱.\dots.X_{k-۱}).\mathcal{C}_i^{k-۱}\\
&= K_{(X_۱,\dots,X_{k-۱})}.\mathcal{C}_i^{k-۱}\\
\text{با توجه به فرض استقرا} &= X_i.
\end{aligned}$$

دقت کنیم پایه استقرا $i = k$ است که در حالت قبل ثابت شد. ■

لم ۸.۳. *اگر $f^{(n)}$ و $g^{(n+۲)}$ دو تابع λ-محاسبه‌پذیر باشند، تابع $\eta_{f,g}$ نیز تابعی λ-محاسبه‌پذیر است. به عبارت دیگر* $f^{(n)} \in \Lambda C \wedge g^{(n+۲)} \in \Lambda C \Rightarrow \eta_{f,g} \in \Lambda C$.

برهان. با توجه به فرض، عبارات F و Gبرای توابع f و g موجودند. عبارات زیر را معرفی می‌کنیم و ادعا می‌کنیم H عبارت مناسبی برای $\eta_{f,g}$ است.

$$\begin{aligned}
G' &= \lambda k.(K_{n+۲}.(G.(k.\mathcal{C}_۱^{n+۲}).\dots.(k.\mathcal{C}_{n+۲}^{n+۲})).(k.\mathcal{C}_۲^{n+۲}).\dots.(k.\mathcal{C}_{n+۱}^{n+۲}).(F_S.(k.\mathcal{C}_{n+۲}^{n+۲})))\\
H' &= \lambda x_۱.\dots.\lambda x_n.\lambda y.(y.G'.(K_{n+۲}.(F.x_۱.\dots.x_n).x_۱.\dots.x_n.C_۰))\\
H &= \lambda x_۱.\dots.\lambda x_n.\lambda y.((H'.x_۱.\dots.x_n.y).\mathcal{C}_۱^{n+۲})
\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم $C_t.G'.(K_{n+۲}.(F.C_{a_۱}\dots C_{a_n}).C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_۰) = K_{(C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t)},C_{a_۱},\dots,C_{a_n},C_t)}$. اگر این ادعا ثابت

شود به سادگی داریم

$$
\begin{aligned}
H.C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_t &= (\lambda x_1.\dots.\lambda x_n.\lambda y.((H'.x_1.\dots.x_n.y).\mathcal{C}_1^{n+2})).C_{a_1}.\dots.C_{a_n}.C_t\\
&= (H'.C_{a_1}.\dots.C_{a_n}.C_t).\mathcal{C}_1^{n+2}\\
&= ((\lambda x_1\dots\lambda x_n.\lambda y.(y.G'.(K_{n+2}.(F.x_1\dots x_n).x_1\dots x_n.C_0))).C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_t).\mathcal{C}_1^{n+2}\\
&= (C_t.G'.(K_{n+2}.(F.C_{a_1}.\dots.C_{a_n}).C_{a_1}.\dots.C_{a_n}.C_0)).\mathcal{C}_1^{n+2}\\
\text{طبق ادعا} &= K_{(C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t)},C_{a_1},\dots,C_{a_n},C_t)}.\mathcal{C}_1^{n+2}\\
&= C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t)}.
\end{aligned}
$$

و حکم ثابت شده. ادعای مطرح‌شده را با استقرا روی t ثابت می‌کنیم. در حالت پایه فرض کنیم $t=0$، در این صورت داریم

$$
\begin{aligned}
C_0.G'.(K_{n+2}.(F.C_{a_1}\dots C_{a_n}).C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_0) &= K_{n+2}.(F.C_{a_1}\dots C_{a_n}).C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_0\\
&= K_{n+2}.C_{f(\bar{a})}.C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_0\\
&= K_{(C_{f(\bar{a})},C_{a_1},\dots,C_{a_n},C_0)}\\
&= K_{(C_{\eta_{f,g}(\bar{a},0)},C_{a_1},\dots,C_{a_n},C_0)}.
\end{aligned}
$$

در حالت گام به کمک فرض استقرا می‌دانیم

$$C_{t-1}.G'.(K_{n+2}.(F.C_{a_1}\dots C_{a_n}).C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_0)=K_{(C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t-1)},C_{a_1},\dots,C_{a_n},C_{t-1})}.$$

برای اثبات حکم استقرا داریم

$$
\begin{aligned}
&C_t.G'.(K_{n+2}.(F.C_{a_1}\dots C_{a_n}).C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_0)\\
&= (\lambda\mathfrak{f}.\lambda\mathfrak{t}.(\mathfrak{f}.(C_{t-1}.\mathfrak{f}.\mathfrak{t}))).G'.(K_{n+2}.(F.C_{a_1}\dots C_{a_n}).C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_t)\\
&= G'.(C_{t-1}.G'.(K_{n+2}.(F.C_{a_1}\dots C_{a_n}).C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_t))\\
\text{طبق فرض استقرا} &= G'.K_{(C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t-1)},C_{a_1},\dots,C_{a_n},C_{t-1})}\\
&= K_{n+2}.(G.C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t-1)}.C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_{t-1}).C_{a_1}\dots C_{a_n}.(F_S.C_{t-1})\\
&= K_{n+2}.C_{g(\eta_{f,g}(\bar{a},t-1),\bar{a},t-1)}.C_{a_1}\dots C_{a_n}.(F_S.C_{t-1})\\
&= K_{n+2}.C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t)}.C_{a_1}\dots C_{a_n}.C_t\\
&= K_{(C_{\eta_{f,g}(\bar{a},t)},C_{a_1},\dots,C_{a_n},C_t)}.
\end{aligned}
$$

پس ادعا اثبات شد و لذا حکم ثابت است. ■

لم ۹.۳. *برای هر عدد طبیعی غیرصفر مانند a داریم*

$$K_{(X_۱,X_۲)}.C_a = X_۲.$$

برهان. مانند برهان لم ۷.۳ داریم

$$\begin{aligned}
K_{(X_۱,X_۲)}.C_a &= K_۲.X_۱.X_۲.C_a \\
&= (\lambda x_۱.\lambda x_۲.\lambda c.\lambda t.((F_{\overline{sgn}}.c.x_۱).((F_{sgn}.c.x_۲).t))).X_۱.X_۲.C_a \\
&= \lambda t.((F_{\overline{sgn}}.C_a.X_۱).(F_{sgn}.C_a.X_۲.t)) \\
&= \lambda t.((C_۰.X_۱).(C_۱.X_۲.t)) \\
&= \lambda t.((C_۱.X_۲.t)) \\
&= \lambda t.(X_۲.t) \\
&= X_۲.
\end{aligned}$$

■

لم ۱۰.۳. *اگر $f^{(n+۱)}$ یک تابع λ- محاسبه‌پذیر باشند، تابع μ_f نیز تابعی λ- محاسبه‌پذیر است. به عبارت دیگر می‌توان گفت* $f^{(n+۱)} \in \Lambda C \Rightarrow \mu_f \in \Lambda C$.

برهان. با توجه به فرض، عبارت F برای تابع f موجود است. عبارات زیر را معرفی می‌کنیم و ادعا می‌کنیم G عبارت مناسبی برای μ_f است.

$$\begin{aligned}
F' &= \lambda g.\lambda x_۱ \ldots \lambda x_n.\lambda y.(K_۲.y.(g.x_۱ \ldots x_n.(F_S.y)).(F.x_۱ \ldots x_n.y)) \\
G' &= (\lambda x.(F'.(x.x))).(\lambda x.(F'.(x.x))) \\
G &= \lambda x_۱ \ldots \lambda x_n.(G'.x_۱ \ldots .x_n.C_۰)
\end{aligned}$$

ابتدا نشان می‌دهیم $G' = F'.G'$. برای اثبات داریم

$$\begin{aligned}
G' &= (\lambda x.(F'.(x.x))).(\lambda x.(F'.(x.x))) \\
&= F'.((\lambda x.(F'.(x.x))).(\lambda x.(F'.(x.x)))) \\
&= F'.G'.
\end{aligned}$$

اکنون ادعا می‌کنیم برای هر $a_۱, \dots a_n$ و t دلخواه داریم

$$G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_t = \begin{cases} C_t & f(\bar{a},t)=۰ \\ G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_{t+۱} & else \end{cases}$$

برای اثبات ادعا داریم

$$\begin{aligned} G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_t &= F'.G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_t \\ &= \lambda g.\lambda x_۱\dots\lambda x_n.\lambda y.(K_۲.y.(g.x_۱\dots x_n.(F_S.y))).(F.x_۱\dots x_n.y)).G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_t \\ &= K_۲.C_t.(G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.(F_S.C_t)).(F.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_t) \\ &= K_۲.C_t.(G.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_{t+۱}).(F.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_t) \\ &= K_{(C_t,G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_{t+۱})}.C_{f(\bar{a},t)}. \end{aligned}$$

با توجه به این که $C_۰ = \mathcal{C}_۱^۲$ می‌توان گفت اگر $f(\bar{a},t)=۰$ حاصل عبارت بالا C_t و به کمک لم **۹.۳** می‌توان گفت در غیر این صورت حاصل این عبارت $G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_{t+۱}$ خواهد بود.

در انتها نشان می‌دهیم G عبارت مناسبی برای μ_f است. ابتدا فرض کنیم $\mu_f(\bar{a})=m$ در این صورت به ازای هر $t<m$، می‌دانیم $f(\bar{a},t)\neq ۰$. همچنین $f(\bar{a},m)=۰$. لذا داریم (در نوشتار زیر فرض بر این است که $m>۲$ اما به وضوح برای حالات دیگر نیز درست است.)

$$\begin{aligned} G.C_{a_۱}\dots C_{a_n} &= (\lambda x_۱\dots\lambda x_n.(G'.x_۱\dots .x_n.C_۰)).C_{a_۱}\dots C_{a_n} \\ &= G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_۰ \\ (۰<m\Rightarrow f(\bar{a},۰)\neq ۰) &= G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_۱ \\ (۱<m\Rightarrow f(\bar{a},۱)\neq ۰) &= G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_۲ \\ &\dots \\ (m-۱<m\Rightarrow f(\bar{a},m-۱)\neq ۰) &= G'.C_{a_۱}\dots C_{a_n}.C_m \\ (f(\bar{a},m)=۰) &= C_m \\ &= C_{\mu_f(\bar{a})}. \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $(\bar{a})$ در دامنه نیست یعنی برای هر $t \in \mathbb{N}$، می‌دانیم $f(\bar{a}, t) \neq ۰$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
G.C_{a_۱} \ldots C_{a_n} &= (\lambda x_۱ \ldots \lambda x_n.(G'.x_۱ \ldots .x_n.C_۰)).C_{a_۱} \ldots C_{a_n} \\
&= G'.C_{a_۱} \ldots C_{a_n}.C_۰ \\
(f(\bar{a}, ۰) \neq ۰) &= G'.C_{a_۱} \ldots C_{a_n}.C_۱ \\
(f(\bar{a}, ۱) \neq ۰) &= G'.C_{a_۱} \ldots C_{a_n}.C_۲ \\
&\ldots \; .
\end{aligned}$$

و عمل ساده کردن هرگز به پایان نمی‌رسد و لذا حکم ثابت است. ■

قضیه ۱۱.۳. *توان محاسباتی حساب لاندا از توان محاسباتی مدل محاسباتی گودل-کلینی کمتر نیست. به عبارت دیگر* $GK \subseteq \Lambda C$.

برهان. با توجه به لم‌های ۱.۳، ۲.۳، ۸.۳ و ۱۰.۳ می‌دانیم $\Lambda\mathrm{C}$ هر چهار خاصیت ذکرشده در تعریف ۵.۲ را دارد. از آنجا که GK کوچک‌ترین مجموعه‌ی دارای این خواص است پس $\mathrm{GK} \subseteq \Lambda\mathrm{C}$. ■

قضیه ۱۲.۳. *توان محاسباتی مدل محاسباتی گودل-کلینی از توان محاسباتی حساب لاندا کمتر نیست. به عبارت دیگر* $\Lambda C \subseteq GK$.

برهان. اثبات این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

قضیه ۱۳.۳. *مدل محاسباتی گودل-کلینی و حساب لاندا معادل هستند. به عبارت دیگر* $\Lambda C = GK$.

برهان. با توجه با قضایای ۱۱.۳ و ۱۲.۳ به سادگی می‌توان نتیجه گرفت $\Lambda\mathrm{C} = \mathrm{GK}$. ■