بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: ....

شماره‌ی دانشجویی: ....

تاریخ: ۲۲ دی ۱۳۹۷

مدت امتحان: ۱۸۰ دقیقه

مدرس: مجتهدی

آزمون پایان ترم نظریه محاسبه

توجّه: می‌توانید از قضایای اثبات شده در کلاس درس استفاده کنید، اما در صورتی که از تمرین‌ها استفاده می‌کنید، آن‌ها را اثبات کنید.

توجّه: تنها در صورتی که فکر می‌کنید سؤالی غلط است، استاد حاضر در جلسه‌ی امتحان را در جریان قرار دهید تا اشکال مربوطه رفع شود.

۱. (۲۰ نمره) تعریف اعداد طبیعی و هم‌چنین تعریف تابع تالی (تابعی که برای هر عدد طبیعی، عددِ بعدیِ آن را برمی‌گرداند) را در حساب لاندا بنویسید.

۲. (۲۰ نمره) آیا سخت‌ترین مسأله‌ی تصمیم‌پذیر وجود دارد؟ یعنی آیا مسأله‌ی تصمیم‌پذیری وجود دارد که همه‌ی مسائل تصمیم‌پذیر دیگر را بتوان به آن فروکاست؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳. (۲۰ نمره) قضایای ریکرژن (یا نقطه‌ثابت) و رایس را بیان کنید و به کمک قضیه‌ی ریکرژن (یا نقطه‌ثابت)، قضیه‌ی رایس را اثبات کنید.

۴. (۲۰ نمره) فرض کنید $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ یک تابع محاسبه‌پذیر جزئی باشد. گوییم f گسترش‌پذیر است اگر تابعِ محاسبه‌پذیرِ تامی مثل $\bar{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود باشد طوری‌که برای هر $n \in \mathsf{Domain}(f)$ داشته باشیم $f(n) = \bar{f}(n)$.
آیا هر تابع محاسبه‌پذیر جزئی‌ای گسترش‌پذیر است؟ برای پاسخ خود استدلال بیاورید.

۵. (۳۰ نمره) از مسائل زیر کدام مولّد است؟ کدام خلّاق است؟ برای پاسخ خود استدلال بیاورید.

(آ) $\mathsf{TOT} := \{n \in \mathbb{N} : \varphi_n \text{ is total}\}$،

(ب) $\overline{\mathsf{TOT}} := \mathbb{N} \setminus \mathsf{TOT}$،

(ج) $A := \{n \in \mathbb{N} : \varphi_n(n)\downarrow \text{ and } \varphi_n(n) = 0\}$.

۶. (۳۰ نمره) (آ) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی مثل n و هر مجموعه‌ی r.e. مثل $A \subseteq \mathbb{N}$، مجموعه‌ی $A \cup \{n\}$ نیز r.e. است.

(ب) نسخه‌ی مؤثر از حکم بالا را بیان کنید. (نیازی به اثبات آن نیست)