



آزمونک پنجم مبانی منطق

تاریخ: ۲۴ آبان ۱۳۹۵
مدت امتحان: ۲۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

شماره‌ی دانشجویی:

نام و نام خانوادگی:

۱. (۵ نمره) درخت استنتاج طبیعی را برای $[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)] \rightarrow [(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)]$ به دست آورید و هم‌چنین نشان دهید (به کمک قضیه‌ی استنتاج) که برای آن یک دنباله‌ی برهان هیلبرتی وجود دارد یا این‌که درخت استنتاج در دست‌گاه حساب رشته‌ای را برای آن رسم کنید.

جواب.

دنباله‌ی برهان هیلبرتی:

نکته: $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \vdash_{HP} X \rightarrow Z$.

اثبات. با استفاده از قضیه‌ی استنتاج، کفایت نشان دهیم

$$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z, X\} \vdash_{HP} Z$$

که البته دنباله‌ی برهان استنتاج بالا به راحتی به دست می‌آید:

۱. $X \rightarrow Y$ مفروضات

۲. X مفروضات

۳. Y ۱ و ۲

۴. $Y \rightarrow Z$ مفروضات

۵. Z ۳ و ۴

با توجه به اینکه قضیه‌ی استنتاج را برای دستگاه هیلبرتی داریم، برای این‌که نشان دهیم

$$\vdash_{HP} [(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)] \rightarrow [(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)]$$

کفایت نشان دهیم

$$\{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)\} \vdash_{HP} (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$$

$$\{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), A \vee C\} \vdash_{HP} B \vee D$$

حالا دنباله‌ی برهانِ زیر را برای استنتاجِ فوق داریم.

۱. $[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)] \rightarrow (C \rightarrow D)$ اصل ۵
۲. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$ مفروضات
۳. $C \rightarrow D$ وضع مقدّم ۱ و ۲
۴. $[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)] \rightarrow (A \rightarrow B)$ اصل ۴
۵. $A \rightarrow B$ وضع مقدّم ۲ و ۴
۶. $B \rightarrow (B \vee D)$ اصل ۷
۷. $A \rightarrow (B \vee D)$ ۵ و ۶ به کمک نکته‌ی بالا
۸. $D \rightarrow (B \vee D)$ اصل ۸
۹. $C \rightarrow (B \vee D)$ ۳ و ۸ به کمک نکته‌ی بالا
۱۰. $(A \rightarrow (B \vee D)) \rightarrow [(C \rightarrow (B \vee D)) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))]$ اصل ۶
۱۱. $(C \rightarrow (B \vee D)) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$ وضع مقدّم ۷ و ۱۰
۱۲. $(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)$ وضع مقدّم ۹ و ۱۱
۱۳. $A \vee C$ مفروضات
۱۴. $B \vee D$ وضع مقدّم ۱۲ و ۱۳

درخت استنتاج طبیعی:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{E \rightarrow \frac{[A]_r}{[A \vee C]_l} \quad E \wedge \frac{[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)]_r}{A \rightarrow B}}{IV \frac{B}{B \vee D}} \quad E \rightarrow \frac{[C]_r}{[C]} \quad E \wedge \frac{[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)]_r}{C \rightarrow D}}{IV \frac{D}{B \vee D}} \\
 (E \vee)_r \frac{[A \vee C]_l}{(I \rightarrow)_r \frac{B \vee D}{(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)}} \\
 (I \rightarrow)_r \frac{(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)}{[(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)] \rightarrow [(A \vee C) \rightarrow (B \vee D)]}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{L} \rightarrow \frac{C \Rightarrow D, C \quad C, D \Rightarrow D}{C, C \rightarrow D \Rightarrow D} \quad \frac{A \Rightarrow B, A \quad A, B \Rightarrow B}{A, A \rightarrow B \Rightarrow B} \text{L} \rightarrow \\
 \text{L} \wedge \frac{C, (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow D}{C, (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D} \quad \frac{A, (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B}{A, (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D} \text{L} \wedge \\
 \text{R} \vee \frac{C, (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D}{A \vee C, (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D} \text{R} \vee \\
 \text{L} \vee \frac{A \vee C, (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D}{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)} \\
 \text{R} \rightarrow \frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee D)}{\Rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))}
 \end{array}$$

موفق باشید.