



امتحان میان ترم منطق ریاضی

تاریخ: ۲۷ آبان ۱۳۹۳
مدت امتحان: ۲ ساعت
مدرس: سیدمجتبی مجتهدی

۱. درخت استنتاج طبیعی را برای گزاره‌های زیر بیابید:

$$(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C) \text{ (نمره ۱۵)}$$

جواب. فرض کنید درخت زیر، D_1 باشد:

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge (B \wedge C)]^1}{A} (\wedge E)}{A \wedge B} (\wedge I) \quad \frac{\frac{\frac{[A \wedge (B \wedge C)]^1}{B \wedge C} (\wedge E)}{B} (\wedge I)}{C} (\wedge I)}{(A \wedge B) \wedge C} (\wedge I)}{(A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B) \wedge C)} (\rightarrow I_1)$$

همچنین فرض کنید درخت زیر D_2 باشد:

$$\frac{\frac{\frac{[(A \wedge B) \wedge C]^2}{A \wedge B} (\wedge E)}{A} (\wedge E) \quad \frac{\frac{[(A \wedge B) \wedge C]^2}{A \wedge B} (\wedge E)}{B} (\wedge I)}{B \wedge C} (\wedge I)}{A \wedge (B \wedge C)} (\wedge I)}{((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \wedge C))} (\rightarrow I_2)$$

در این صورت درخت زیر یک درخت استنتاج طبیعی برای $(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ است. توجه داشته باشید که $X \leftrightarrow Y$ کوتاه‌نوشتی برای $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ است.

$$\frac{D_2 \quad D_1}{(A \wedge (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)} (\wedge I)$$

$$(ب) \quad \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \text{ (نمره ۱۵)}$$

جواب.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg(A \wedge B)]^1}{\neg(\neg A \vee \neg B)} (\neg E) \quad \frac{[\neg B]^2}{\neg A \vee \neg B} (\vee I)}{\perp} (RAA)_\forall}{\frac{\perp}{B} (RAA)_\forall} (\neg E) \quad \frac{\frac{[\neg A]^3}{\neg A \vee \neg B} (\vee I) \quad [\neg(\neg A \vee \neg B)]^2}{\perp} (RAA)_\forall}{\frac{\perp}{A} (RAA)_\forall} (\neg E)}{\frac{\perp}{\neg A \vee \neg B} (RAA)_\forall} (\rightarrow I)_\forall} \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

۲. (نمره ۱۰) یک دنباله‌ی برهان در دستگاه هیلبرتی برای $A \rightarrow (A \wedge A)$ بیابید. راه‌نمایی: اصول مورد نیاز از دست‌گاه هیلبرتی از این قرارند: $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$, $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta))$, $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi))$.

جواب. برای راحتی، در بالای هر عضو دنباله شماره ترتیبی آن و اصل متناظر با آن یا قاعده‌ای که از آن استفاده شده نوشته شده. فرض کنید q دنباله‌ی استنتاج زیر برای $A \rightarrow A$ باشد.

$$\begin{array}{l} 1: \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi) \qquad 2: (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta)) \\ \langle A \rightarrow (A \rightarrow A), (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)), \\ 3: \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi) \qquad 4: \text{قاعده استنتاج روی ۲ و ۳} \qquad 5: \text{قاعده استنتاج روی ۱ و ۴} \qquad 6: \phi \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \wedge \psi)) \\ A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A), (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A), \quad A \rightarrow A, \quad A \rightarrow (A \rightarrow A \wedge A), \\ 7: (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \theta)) \qquad 8: \text{قاعده استنتاج روی ۶ و ۷} \qquad 5 \text{ و } 8 \text{ قاعده استنتاج روی ۸ و ۵} \\ (A \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge A))) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge A)), (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge A) \quad A \rightarrow (A \wedge A) \rangle \end{array}$$

۳. (۱۰ نمره) نشان دهید $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$ به طور تابعی کامل نیست.

جواب. فرض کنید I تابع تعبیر یگانه‌ای باشد که برای هر اتم p داشته باشیم $I(p) = 1$. با استقرا روی پیچیدگی A می‌توان نشان داد که هر گزاره‌ای مثل A که در زبان $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$ در نظر بگیریم، $I(A) = 1$. بنابراین برای هر فرمول A در زبان $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$ ، داریم $A \leftrightarrow \perp \notin$. بنابراین $\{\rightarrow, \vee, \wedge\}$ به طور تابعی کامل نیست.

۴. (۲۰ نمره) فرم نرمال فصلی را برای گزاره‌ی زیر بیابید:

$$[(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_4 \vee \neg p_5)] \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow p_7)$$

جواب. گزاره‌ی فوق را قدم به قدم ساده می‌کنیم تا به فرم نرمال فصلی برسیم:

$$\begin{aligned} & [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge \neg(p_4 \vee \neg p_5)] \vee (p_1 \wedge \neg p_7) \\ & [(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_4 \wedge p_5)] \vee (p_1 \wedge \neg p_7) \\ & [(\neg p_1 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (p_2 \wedge \neg p_4 \wedge p_5)] \vee (p_1 \wedge \neg p_7) \\ & (\neg p_1 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (p_2 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_7) \end{aligned}$$

۵. (۱۰ نمره) فرض کنید p یک متغیر اتمی مشخص باشد. صعودی و نزولی بودن گزاره‌ی A به صورت استقرایی تعریف می‌شود:

- A اتمی است: در این صورت A صعودی است اگر $A = p$ و A هرگز نزولی نیست.
- $A = B \vee C$: در این صورت A صعودی است اگر B یا C صعودی باشند. همچنین A نزولی است اگر B و C نزولی باشند.
- $A = \neg B$: در این صورت A صعودی است اگر B نزولی باشد و A نزولی است اگر B صعودی باشد.

نشان دهید برای هر A صعودی، $\models p \rightarrow A$.

جواب. با استقرا روی پیچیدگی A حکم قوی تر زیر را اثبات می‌کنیم:

اگر A صعودی باشد $\models p \rightarrow A$ و اگر A نزولی باشد، $\models p \rightarrow \neg A$

• A اتمی باشد:

- اگر A صعودی باشد: $A = p$ و بنابراین $\models p \rightarrow A$ ،
- اگر A نزولی باشد: بنا بر تعریف این حالت غیر ممکن است.

• $A = B \vee C$:

- A صعودی باشد: در این صورت B صعودی است یا C صعودی است. مثلاً فرض کنید B صعودی باشد. در این صورت طبق فرض استقرا $\models p \rightarrow B$ و بنابراین $\models p \rightarrow A$.

- A نزولی باشد: در این صورت B و C هر دو نزولی هستند و بنا بر فرض استقرا، $\models p \rightarrow \neg B$ و $\models p \rightarrow \neg C$. در نتیجه $\models p \rightarrow \neg A$.

• $A = \neg B$:

- A صعودی باشد: در این صورت B نزولی است و بنابراین طبق فرض استقرا، $\models p \rightarrow \neg B$ ،

- A نزولی است: در این صورت B صعودی است و بنابراین طبق فرض استقرا $\models p \rightarrow B$. در نتیجه $\models p \rightarrow \neg \neg B$ ، یا به عبارت دیگر $\models p \rightarrow \neg A$.