پاسخنامه تمرین‌های کتاب منطق ریاضی

منطبق با ویراست دوم، چاپ اول

سید مجتبی مجتهدی

۳۰ مهر ۱۳۹۵

۱ فصل اول: منطق گزاره‌ها

لم ۱ *برای گزاره‌های A, B و هر تعبیر مثل I داریم:*

$$\begin{cases} I \models A[p|B] \leftrightarrow A[p|\bot] & : I(B) = 0 \\ I \models A[p|B] \leftrightarrow A[p|\top] & : I(B) = 1 \end{cases}$$

اثبات. اثبات با استقرا روی پیچیدگی A به‌راحتی به‌دست می‌آید. □

لم ۲ *برای هر فرمول A که بدون متغیر اتمی باشد داریم: $\vdash A$ یا $\vdash \neg A$.*

اثبات. استقرا روی پیچیدگی A . □

۱.

۲. اثبات همه‌ی قسمت‌ها به کمکِ جدولِ ارزش به صورتِ زیر است:

۱)

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۱

۲)

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \to B$
۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۱

۳)

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱

۴)

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱

۵)

A	$\neg A$	$\bot$	$A \to \bot$
۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰

۶)

A	$\bot$	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
۰	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰

۷)

A	$\top$	$\neg A$	$A \vee \neg A$
۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱

۸)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰

۹)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰

۱۰)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۱۱)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۳. (آ) فرض کنید p اتمی باشد که در A و B نیامده است، یعنی اتم p زیرفرمول A یا B نیست. تعریف می‌کنیم : $C = (A \vee p) \wedge B$. با این تعریف به راحتی می‌توان نشان داد که $A \models C \models B$. بنابراین کافی است نشان دهیم $B \not\models C$ و $C \not\models A$. از آن‌جایی که بنا بر فرض مساله $B \not\models A$، می‌توان نتیجه گرفت (بنابر تعریف صدق) تعبیری مثل I وجود دارد طوری که $I \models B$ و $I \not\models A$. ابتدا توابع ارزش v_p و $v_{\neg p}$ را این‌طور تعریف می‌کنیم که روی اتم‌های غیر از p همانند Iتعریف می‌شوند و روی اتم p به صورت $v_p(p) := ۱, v_{\neg p}(p) := ۰$ تعریف می‌شوند. حال به کمک قضیه‌ی ۲٫۲٫۱ از کتاب درسی ([۱]) تعبیرهای یگانه‌ی I_p و $I_{\neg p}$ را از روی توابع ارزش v_p و $v_{\neg p}$ به‌دست می‌آوریم. اکنون با استقرا روی پیچیدگی فرمول‌هایی مثل D که p در آن‌ها نیامده، نشان می‌دهیم:

$$I_p(D) = I_{\neg p}(D) = I(D) \qquad (۱)$$

- اگر D اتمی باشد: در این صورت چون اتم p در D نیامده است، $D \neq p$ و بنابراین طبق تعریف داریم: $I_p(D) = v_p(D) = I(D) = v_{\neg p}(D) = I_{\neg p}(D)$
- اگر $D = D_۱ \wedge D_۲$:

بنا بر تعریف ۱٫۲٫۱ کتاب: $I_p(D_۱ \wedge D_۲) = ۱ \iff I_p(D_۱) = I_p(D_۲) = ۱$

بنا بر فرض استقرا: $\iff I(D_۱) = I(D_۲) = ۱$

بنا بر تعریف ۱٫۲٫۱ کتاب: $\iff I(D_۱ \wedge D_۲) = ۱$

بنا بر تعریف ۱٫۲٫۱ کتاب: $I_{\neg p}(D_۱ \wedge D_۲) = ۱ \iff I_{\neg p}(D_۱) = I_{\neg p}(D_۲) = ۱$

بنا بر فرض استقرا: $\iff I(D_۱) = I(D_۲) = ۱$

بنا بر تعریف ۱٫۲٫۱ کتاب: $\iff I(D_۱ \wedge D_۲) = ۱$

- حالت‌های $D = D_۱ \vee D_۲, D = D_۱ \to D_۲, D = \neg D_۱$ کاملاً شبیه به حالت قبل است و به عهده خواننده واگذار می‌شود.

حال بنا بر (۱) داریم: $I_{\neg p}(B) = I(B) = ۱$ و همچنین $I_{\neg p}(p) = I_{\neg p}(A) = I(A) = ۰$. بنابر این $I_{\neg p} \not\models C, I_{\neg p} \models B$ که نتیجه می‌دهد$B \not\models C$. همین طور بنا بر (۱) داریم: $I_p(A) = I(A) = ۰$ و همچنین $I_p(p) = I_p(B) = I(B) = ۱$. بنابر این $I_p \not\models A, I_p \models C$ که نتیجه می‌دهد $C \not\models A$.

(ب) ابتدا تعریف می‌کنیم: $M(A,B) := (A \vee p) \wedge B$ که در آن p اتمی است که در A و B نیامده است. حال قرار دهید $A_۰ = \bot, A_\infty := \top$ و برای هر $n \geq ۱$ قرار دهید: $A_{n+۱} := M(A_n, \top)$. طبق قسمت الف، دنباله $\{A_n\}_n$ دارای خاصیت مطلوب است.

(ج) **توجه:** تعریف قابل مقایسه با این تعریف جایگزین شود: گوییم دو گزاره A و B قابل مقایسه‌اند اگر $A \prec B$ یا $B \prec A$ یا $\models A \leftrightarrow B$.
همچنین در قسمت آخر سوال بجای $C \prec D$ باید قرار دهیم $C \models D$.
با این تغیرات تعریف می‌کنیم $C = A \vee B$. بنا بر این طبق تعریف قابل مقایسه داریم: $A \not\models B$ و $B \not\models A$ و بنابراین تعبیرهای $I_۱$ و $I_۲$ وجود دارند طوری که $I_۱ \models A$، $I_۱ \not\models B$ ، $I_۲ \models B$ ، $I_۲ \not\models A$. بنابراین طبق تعریف داریم: $I_۱ \models C, I_۱ \not\models B$ و $I_۲ \models C, I_۲ \not\models A$. که نتیجه می‌دهد $C \not\models A$ و $C \not\models B$. از طرفی به وضوح داریم $B \models C$ و $A \models C$. بنابراین $A \prec C$ و $B \prec C$. حال فرض کنید D فرمولی باشد که $A \prec D$ و $B \prec D$. بنابراین $\models B \to D$ و $\models A \to D$. این مطلب به‌راحتی به کمک تعریف صدق، نتیجه می‌دهد: $B \vee A \models D$ یعنی $C \models D$.

.۴

۵. با دقت در در سه گزاره اول به راحتی نتیجه می‌شود که اگر این سه گزاره راست باشند و بنابراین گزاره چهارم غلط باشد، هیچ‌کس آخر نشده است که تناقض است. پس یک نفر از (الف)،(ب)، (ج)، ادعای غلطی کرده‌اند و بنابراین ادعای (د) درست است، یعنی (د) آخر شده است. این نتیجه می‌دهد که (ب) نیز آخر نشده است، پس (ب) نیز درست می‌گوید که آخر نشده است. حال اگر (الف) ادعای غلطی کرده باشد، یعنی (الف) اول شده است (دقت کنید که چون (د) آخر شده، (الف) نمی‌تونه آخر شده باشد). این نتیجه می‌دهد که ادعای (ج) نیز نادرست است که غیر ممکن است که دو نفر ادعای غلطی کرده باشند، پس فرض غلط بودن ادعای (الف) منتفی است، یعنی (الف)، (ب) و (د) ادعاهای درستی می‌کنند و در این بین (ب) ادعای غلطی می‌کند.

۶. تمامی استدلال‌های زیر برای این که یک مجموعه از ادات کامل نیستند مبتنی براین است که اگر یک مجموعه از ادات مثل X کامل باشند و PR و $PR(X)$ به ترتیب مجموعه همه گزاره‌های زبان استاندارد که در کتاب آمده و مجموعه همه گزاره‌هایی که با ادات X ساخته می‌شوند، باشند ، آن‌گاه برای هر فرمول مثل $A \in PR$، فرمولی مثل $B \in PR(X)$ هست که $\models A \leftrightarrow B$. بنابراین برای این که نشان دهیم مجموعه X از ادات کامل نیستند کافی است فرمولی مثل A در PR را بیابیم که با هیچ یک از فرمول‌های داخل $PR(X)$ معادل نیست.

(آ) $\perp$: برای این حالت ابتدا توجه کنید که تمام فرمول‌هایی که می‌توان با ادات $\perp$ ساخت عبارتند از: $PR(\perp) = \{p_1, p_2, \ldots\} \cup \{\perp\}$.، که هیچ کدام از آن‌ها با $\top$ معادل نیستند، یعنی برای هر $A \in PR(\perp)$ داریم: $\not\models A \leftrightarrow \top$.

$\neg$: نشان می‌دهیم برای هر $B \in PR(\neg)$، داریم: $\not\models B \leftrightarrow \top$ و همچنین $\not\models B \leftrightarrow \perp$. برای اثبات این مطلب روی پیچیدگی B استقرا می‌زنیم:

- اگر B اتمی باشد: در این حالت باید B یکی از اتم های $\{p_1, p_2, \ldots\}$ باشد، بنابراین حکم به وضوح برقرار است یعنی به وضوح داریم: $\not\models B \leftrightarrow \top$ و $\not\models B \leftrightarrow \perp$.
- اگر $B = \neg C$: در این حالت نیز با توجه به این‌که $\models B \leftrightarrow \top$ اگر و فقط اگر $\models C \leftrightarrow \perp$، و همچنین $\models B \leftrightarrow \perp$ اگر و فقط اگر $\models C \leftrightarrow \top$، با فرض استقرا حکم به‌دست می‌آید.

$\rightarrow$: در این حالت با استقرا روی پیچیدگی $B \in PR(\rightarrow)$ ثابت می‌کنیم $\not\models B \leftrightarrow \perp$: حکم برای حالت اتمی به وضوح برقرار است. پس فرض کنید $\not\models B_1 \leftrightarrow \perp$ و

$\not\models B_2 \leftrightarrow \perp$ و فرض کنید $B = B_1 \leftrightarrow B_2$. حال چون $\models B \leftrightarrow \perp$ نتیجه می‌دهد $\models B_2 \leftrightarrow \perp$، حکم به دست می‌آید.

حالت‌های دیگر دقیقا با استدلال مشابه حالت $\rightarrow$ به‌دست می‌آیند. همچنین حکم قسمت (ب) نیز این مطلب را نتیجه می‌دهد.

(ب) برای اثبات این قسمت ابتدا با استقرا روی $A \in PR(\vee, \wedge)$ نشان می‌دهیم که $I \models A \leftrightarrow \top$ که در آن I تعبیری است که $I(p) = ۱$ برای هر اتم مثل p:

اگر B اتمی باشد که حکم به وضوح برقرار است.

اگر $B = C \vee D$ یا $B = C \wedge D$: در این صورت با استفاده از تعریف صدق و فرض استقرا حکم به‌دست می‌آید.

حال اگر $\{\vee, \wedge\}$ به طور تابعی کامل باشد باید عبارتی مثل $A \in PR(\vee, \wedge)$ یافت شود طوری که $\models A \leftrightarrow \perp$. از جمله باید داشته باشیم $I \models A \leftrightarrow \perp$، ولی این مطلب با حکمی که پیش‌تر ثابت کردیم تناقض دارد. پس $\{\vee, \wedge\}$ به طور تابعی کامل نیست.

(ج) اولا توجه کنید که تعداد کل ادات دو موضعی برابر است با تعداد توابع از دامنه $\{۰, ۱\} \times \{۰, ۱\}$ به برد $\{۰, ۱\}$. بنابراین کلا ۱۶ ادات دو موضعی داریم. ولی هر اداتی که $(\top, \top)$ را به $\top$ ببرد، حتما کامل نیست زیرا: فرض کنید $ ادات دوموضعی باشد که $\models \$(\top, \top) \leftrightarrow \top$. در این صورت با همان استدلال قسمت (ب) می‌توان ثابت کرد که $ کامل نیست.

با روش مشابه، هر اداتی که $(\perp, \perp)$ را به $\perp$ ببرد، باز هم کامل نیست. بنابراین از۱۶ تابع، ۴ تابع باقی می‌ماند که باید بررسی شود. یکی از آن‌ها شفراست که در کتاب ثابت شده که کامل است، دیگری مشابه شفر تعریف می‌شود و فقط به‌جای $\wedge$ باید $\vee$ داشته باشد یعنی باید $\neg(p \vee q)$ باشد یا به عبارت دیگر باید $\neg(\neg A | \neg B)$ باشد ، که باز هم کامل است و با روش مشابه برای شفر می‌توان این موضوع را ثابت کرد، و دو ادات دیگر ادات نقیض هستند یعنی یکی از آن‌ها (p, q) را به $\neg p$ و دیگری (p, q) را به $\neg q$ می‌برد، که با استدلال مشابه قسمت (الف) می‌توان نشان داد که این دو ادات کامل نیستند.

۷. (آ) $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)$ و یا معادلا $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$.

(ب) با استقرا روی پیچیدگی $A \in PR(\$)$ نشان می‌دهیم که: $I_\top \models A \leftrightarrow \top$ ، که در آن$I_\top$ تعبیری است که روی همه اتم‌ها برابر با صفر تعریف می‌شود.

اگر p اتمی باشد، بوضوح حکم برقرار است. بنابراین فرض کنید $D = \$(A, B, C)$ ، با استفاده از تعریف $ و تعریف صدق و همچنین فرض استقرا، به‌راحتی نتیجه می‌شود که $I_\top \models D \leftrightarrow \top$. بنابراین حکم استقرا ثابت می‌شود.

بنابر حکم فوق می‌توان نتیجه گرفت که فرمولی مثل $A \in PR(\$)$ وجود ندارد که $\models A \leftrightarrow \perp$. بنابراین $ به طور تابعی کامل نیست.

(ج) به راحتی با تعریف صدق می‌توان ثابت کرد که $\models \$(A, B, A) \leftrightarrow (A \wedge B)$ و همچنین $\models \$(A, \perp, \top) \leftrightarrow \neg A$. بنابراین چون $\{\neg, \wedge\}$ به طور تابعی کامل است، $ نیز به طور تابعی کامل است.

(د) بله کامل است، زیرا $\models \$(A,B,A) \leftrightarrow (A \wedge B)$ و بنابراین چون $\{\neg, \wedge\}$ به طور تابعی کامل است، $\$$ نیز به طور تابعی کامل است.

۸. اصل۱.

$$(\to I)_1\ \dfrac{(\to I)\ \dfrac{[A]_1}{B \to A}}{A \to (B \to C)}$$

اصل۲.

$$(\to I)_3\ \dfrac{(\to I)_2\ \dfrac{(\to I)_1\ \dfrac{\dfrac{(\to E)\ \dfrac{[A]_1 \qquad [A \to B]_2}{B} \qquad (\to E)\ \dfrac{[A \to (B \to C)]_3 \qquad [A]_1}{B \to C}}{C}\ (\to E)}{A \to C}}{(A \to B) \to (A \to C)}}{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}$$

اصل۳.

$$(\to I)_2\ \dfrac{(\to I)_1\ \dfrac{(\wedge I)\ \dfrac{[B]_2 \qquad [A]_1}{A \wedge B}}{B \to (A \wedge B)}}{A \to (B \to (A \wedge B))}$$

اصل۴.

$$(\to I)_1\ \dfrac{(\wedge E)\ \dfrac{[A \wedge B]_1}{A}}{(A \wedge B) \to A}$$

اصل۵.

$$(\to I)_1\ \dfrac{(\wedge E)\ \dfrac{[A \wedge B]_1}{B}}{(A \wedge B) \to B}$$

اصل۶.

$$(\to I)_4\ \dfrac{(\to I)_3\ \dfrac{(\to I)_2\ \dfrac{(\vee E)_1\ \dfrac{[A \vee C]_2 \qquad \dfrac{[C \to B]_3 \qquad [C]_1}{B}\ (\to E) \qquad \dfrac{[A \to B]_4 \qquad [A]_1}{B}\ (\to E)}{B}}{(A \vee C) \to B}}{(C \to B) \to ((A \vee C) \to B)}}{(A \to B) \to ((C \to B) \to ((C \vee A) \to B))}$$

اصل۷.

$$(\to I)_1\ \dfrac{(\vee I)\ \dfrac{[A]_1}{A \vee B}}{A \to (A \vee B)}$$

اصل۸.

$$(\to I)_1\ \dfrac{(\vee I)\ \dfrac{[B]_1}{A\vee B}}{B\to(A\vee B)}$$

اصل۹.

$$(\to I)_2\ \dfrac{\dfrac{(\neg E)\ \dfrac{[\neg A]_1 \qquad [\neg\neg A]_2}{\bot}}{A}\ (RAA)_1}{\neg\neg A\to A}$$

اصل۱۰.

$$(\wedge I)\ \dfrac{(\to I)_4\ \dfrac{(\neg I)_3\ \dfrac{\dfrac{[A]_3 \qquad [A\to\bot]_4}{\bot}\ (\to E)}{\neg A}}{(A\to\bot)\to\neg A} \qquad (\to I)_2\ \dfrac{(\to I)_1\ \dfrac{(\neg E)\ \dfrac{[A]_1 \qquad [\neg A]_2}{\bot}}{A\to\bot}}{\neg A\to(A\to\bot)}}{\neg A\leftrightarrow(A\to\bot)}$$

۹. الف) با استقرا رویِ پیچیدگیِ A، نشان می‌دهیم $A \vdash \bot$.

- اگر A اتمی باشد، بنابر فرض مسأله داریم : $A \vdash \bot$.
- اگر $A = A_1 \wedge A_2$، طبق فرض استقرا $A_1 \vdash \bot$ و $A_2 \vdash \bot$. بنابراین، طبق قاعده‌ی $(\wedge I)$ داریم $A_1 \wedge A_2 \vdash \bot$.
- اگر $A = A_1 \vee A_2$، طبق فرض استقرا داریم $A_1 \vdash \bot$ و بنابراین طبق قاعده‌ی $(\vee I)$ داریم $A_1 \vee A_2 \vdash \bot$.
- اگر $A = A_1 \to A_2$:

$$(\to I)\ \dfrac{\text{طبق فرض استقراء}\ \dfrac{\bot}{A_2}}{A_1\to A_2}$$

- اگر $A = \neg A_1$: (برای استدلالِ این قسمت به فرضِ استقراء نیازی نداریم)

$$(\neg I)\ \dfrac{\bot}{\neg A_1}$$

ب) این قسمت غلط است.

ج) بله. قاعده‌ی $\bot/A$ از قاعده‌ی RAA نتیجه می‌شود، به عبارتِ دیگر، این قاعده، حالتِ خاصی از RAA است. بنابراین، حذف قاعده‌ی $\bot/A$ تاثیری روی دستگاه ندارد.

توجّه: اگر در دستگاهِ استنتاجِ طبیعی ،(NP) قواعدِ معرّفی و حذفِ $\neg$ را حذف کنیم و $\neg A$ را به صورتِ $A \to \bot$ تعریف کنیم، جوابِ قسمتِ (ج) منفی می‌شود.

۱۰. ابتدا به این نکته توجه کنید که تعریف آمده در کتاب برای $\Gamma \vdash_{NP} A$، می‌گوید درخت استنتاجی برای A وجود دارد که مقدمات حذف نشده آن داخل مجموعه Γ می‌باشند. بنابراین با استقرا روی درخت استنتاج کافی است ثابت می‌کنیم برای هر درخت استنتاج مثل $\mathcal{D}$ ، مقدمات حذف نشده آن، مجموعه‌ای متناهی مثل Δ است. توجه داشته باشید که شهودا چون همه درخت‌های استنتاج متناهی هستند باید مقدمات حذف نشده آن نیز متناهی باشند.

گام‌های استقرا را مطابق بندهای تعریف ۵,۳,۱ کتاب دنبال می‌کنیم:

حالت۱. اگر $\mathcal{D}$ یک گره‌ای باشد، بنابراین مقدمات حذف نشده $\mathcal{D}$ طبق تعریف مجموعه‌ای تک‌عضوی و بنابراین متناهی است.

حالت۲. اگر آخرین قاعده استفاده شده در $\mathcal{D}$، قاعده‌ی $(\wedge I)$ باشد و درخت استنتاج به فرم $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_1\\ A_2 & A_1\end{matrix}}{A_1 \wedge A_2}$ باشد، طبق فرض استقرا مجموعه‌های متناهی Δ_1, Δ_2 وجود دارند طوری که همه مقدمات حذف نشده‌ی درخت‌های استنتاج $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ به ترتیب Δ_1 و Δ_2 هستند. بنابراین $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ همه مقدمات حذف نشده در درخت استنتاج $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_1\\ A_2 & A_1\end{matrix}}{A_1 \wedge A_2}$ هستند.

همه حالت‌های دیگر به سادگی با روش مشابه به دست می‌آیند. ما در این جا فقط یک حالت دیگر را بررسی می‌کنیم، حالتی که آخرین گام استفاده شده در درخت استنتاج برای A، قاعده معرفی $\to$ باشد، یعنی $A = A_1 \to A_2$ و درخت استنتاج A به صورت $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A_2\end{matrix}}{A_1 \to A_2}$ است. حال طبق فرض استقرا مجموعه‌ای متناهی مثل Δ وجود دارد طوری که همه مقدمات حذف نشده در استنتاج $\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A_2\end{matrix}$ برابر با مجموعه Δ است. بنابراین همه مقدمات حذف نشده در درخت استناج $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A_2\end{matrix}}{A_1 \to A_2}$ مجموعه $\Delta \setminus \{A_1\}$ است، که مجموعه‌ای متناهی است.

۱۱. **توجه:** در دستگاه حساب رشته‌ها، $\neg A$ تعریف می‌شود $A \to \bot$. توجه کنید که این یک تعریف است در فرازبان و نیازی به اضافه کردن اصل ندارد.

اصل۱.

$$R\to\,\dfrac{R\to\,\dfrac{\mathrm{LW}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}}{A \Rightarrow B \to A}}{\Rightarrow A \to (B \to A)}$$

اصل۲.

$$R\to\,\dfrac{R\to\,\dfrac{R\to\,\dfrac{L\to\,\dfrac{\to\,\dfrac{L\to\,\dfrac{\mathrm{LW}\,\dfrac{C \Rightarrow C}{C, B, A \Rightarrow C} \qquad \text{RW،LW}\,\dfrac{B \Rightarrow B}{C, B, A \Rightarrow C, B}}{B \to C, B, A \Rightarrow C} \qquad \text{RW،LW}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{B, A \Rightarrow A, C}}{A \to (B \to C), B, A \Rightarrow C} \qquad \mathrm{LW}\,\dfrac{\mathrm{RW}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow C, A}}{A \to (B \to C), A \Rightarrow C, A}}{A \to (B \to C), A \to B, A \Rightarrow C}}{A \to (B \to C), A \to B \Rightarrow A \to C}}{A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to (A \to C)}}{\Rightarrow (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}$$

اصل۳.

$$R\to\,\dfrac{R\to\,\dfrac{R\wedge\,\dfrac{\mathrm{LW}\,\dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B} \qquad \mathrm{LW}\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}}{A, B \Rightarrow A \wedge B}}{A \Rightarrow B \to (A \wedge B)}}{\Rightarrow A \to (B \to (A \wedge B))}$$

اصل۴.

$$R\to\,\dfrac{L\wedge\,\dfrac{A \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow A}}{\Rightarrow (A \wedge B) \to A}$$

اصل۵.

$$R\to\ \dfrac{L\wedge\ \dfrac{B\Rightarrow B}{A\wedge B\Rightarrow B}}{\Rightarrow (A\wedge B)\to B}$$

اصل۶.

$$R\to\ \dfrac{R\to\ \dfrac{R\to\ \dfrac{L\to\ \dfrac{L\to\ \dfrac{\text{LW}\ \dfrac{B\Rightarrow B}{B,B,A\vee C\Rightarrow B}\qquad \text{RW،LW}\ \dfrac{B\Rightarrow B}{B,A\vee C\Rightarrow B,C}}{B,C\to B,A\vee C\Rightarrow B}\qquad L\to\ \dfrac{\text{RW،LW}\ \dfrac{B\Rightarrow B}{B,A\vee C\Rightarrow B,A}\qquad L\vee\ \dfrac{\text{RW}\ \dfrac{A\Rightarrow A}{A\Rightarrow A,B,C}\qquad \text{RW}\ \dfrac{C\Rightarrow C}{C\Rightarrow A,B,C}}{A\vee C\Rightarrow B,A,C}}{C\to B,A\vee C\Rightarrow B,A}}{A\to B,C\to B,A\vee C\Rightarrow B}}{A\to B,C\to B\Rightarrow A\vee C\to B}}{A\to B\Rightarrow ((C\to B)\to(A\vee C\to B))}}{\Rightarrow (A\to B)\to((C\to B)\to(A\vee C\to B))}$$

اصل۷.

$$R\to\ \dfrac{R\vee\ \dfrac{A\Rightarrow A}{A\Rightarrow A\vee B}}{\Rightarrow A\to(A\vee B)}$$

اصل۸.

$$R\to\ \dfrac{R\vee\ \dfrac{B\Rightarrow B}{B\Rightarrow A\vee B}}{\Rightarrow B\to(A\vee B)}$$

اصل۹.

$$R\to\ \dfrac{L\to\ \dfrac{\bot\Rightarrow A\qquad R\to\ \dfrac{\text{RW}\ \dfrac{A\Rightarrow A}{A\Rightarrow A,\bot}}{\Rightarrow A,A\to\bot}}{(A\to\bot)\to\bot\Rightarrow A}}{\Rightarrow ((A\to\bot)\to\bot)\to A}$$

اصل۱۰. توجه کنید که اصل ۱۰ هیلبرت بنابر تعریف $\neg A$ در دستگاه حساب رشته‌ها نیز یک اصل است.

۱۲. فرض کنید GP' همان دستگاهِ حسابِ رشته‌ها باشد که در آن اصل‌شِمایِ $A \Rightarrow A$ به Aهای اتمی (شاملِ $\bot$) محدود شده است. با استقراء رویِ پیچیدگیِ گزاره‌ی A، نشان می‌دهیم $GP' \vdash A \Rightarrow A$: (توجّه داریم که نقیض جزو ادواتِ زبان نیست و به‌صورتِ $\neg A := A \to \bot$ تعریف می‌شود.)

- A اتمی باشد: در این صورت $A \Rightarrow A$ یک اصلِ GP' است.
- $A = A_1 \wedge A_2$:

$$\text{R}\wedge\ \dfrac{\text{L}\wedge\ \dfrac{A_2\Rightarrow A_2}{A_1\wedge A_2\Rightarrow A_2}\qquad \text{L}\wedge\ \dfrac{A_1\Rightarrow A_1}{A_1\wedge A_2\Rightarrow A_1}}{A_1\wedge A_2\Rightarrow A_1\wedge A_2}$$

- $A = A_1 \vee A_2$:

$$\text{L}\vee\ \dfrac{\text{R}\vee\ \dfrac{A_2\Rightarrow A_2}{A_2\Rightarrow A_1\vee A_2}\qquad \text{R}\vee\ \dfrac{A_1\Rightarrow A_1}{A_1\Rightarrow A_1\vee A_2}}{A_1\vee A_2\Rightarrow A_1\vee A_2}$$

• $A = A_1 \to A_2$:

$$\text{L}\to\ \dfrac{\text{R}\to\ \dfrac{\text{RW}\ \dfrac{A_1 \Rightarrow A_1}{A_1 \Rightarrow A_1, A_2}}{\Rightarrow A_1, A_1 \to A_2} \qquad \text{R}\to\ \dfrac{\text{LW}\ \dfrac{A_2 \Rightarrow A_2}{A_1, A_2 \Rightarrow A_2}}{A_2 \Rightarrow A_1 \to A_2}}{A_1 \to A_2 \Rightarrow A_1 \to A_2}$$

۱۳. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $GP' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ آن‌گاه $GP \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. برای اثباتِ این مطلب، از استقرا رویِ اثباتِ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در GP' استفاده می‌کنیم:

• اگر $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل در GP' باشد. در این صورت یکی از دو حالت زیر را داریم:

– $\Gamma = \{\bot\} \cup \Gamma_0$. در این صورت اگر m و n به‌ترتیب تعداد اعضایِ Γ_0 و Δ باشند و A عضوِ دل‌خواهی از Δ باشد، درختِ استنتاجِ زیر را داریم:

$$\text{RW بار استفاده از } n-1\ \dfrac{\text{LW بار استفاده از } m\ \dfrac{\bot \Rightarrow A}{\bot, \Gamma_0 \Rightarrow A}}{\bot, \Gamma_0 \Rightarrow \Delta}$$

– $\Gamma = \{A\} \cup \Gamma_0$ و $\Delta = \{A\} \cup \Delta_0$. در این صورت اگر m و n به ترتیب، تعداد اعضایِ Γ_0 و Δ باشند، درختِ استنتاجِ زیر را داریم:

$$\text{RW بار استفاده از } n-1\ \dfrac{\text{LW بار استفاده از } m\ \dfrac{A \Rightarrow A}{A, \Gamma_0 \Rightarrow A}}{A, \Gamma_0 \Rightarrow A, \Delta_0}$$

• آخرین مرحله از استنتاجِ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در GP'، از قاعده‌ی R استفاده شده است و درختِ استنتاجِ آن در GP' به یکی از فرم‌هایِ زیر است:

$$\text{R}\ \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\ \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

در این‌صورت، طبق فرض استقراء، استنتاجِ $\mathcal{D}'_i$ برایِ $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ در GP وجود دارد. اکنون، از آن‌جا که تمامیِ قواعدِ GP' در GP نیز وجود دارد، درخت‌هایِ استنتاجِ زیر در GP هستند:

$$\text{R}\ \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}'_2 \\ \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}'_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\ \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}'_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

اکنون عکس مطلبِ فوق را نشان می‌دهیم، یعنی: اگر $GP \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ آن‌گاه $GP' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. برای اثباتِ این مطلب، ابتدا حکمِ زیر (حکمِ ۲) را ثابت می‌کنیم:

$$\text{اگر} \qquad GP' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \text{آن‌گاه} \qquad GP' \vdash \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta' \tag{۲}$$

اثباتِ حکمِ ۲، با استقرا رویِ استنتاجِ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در دست‌گاهِ GP' انجام می‌شود:

• $\Gamma \Rightarrow \Delta$ از اصولِ GP' باشد. در این‌صورت به‌راحتی دیده می‌شود که $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ هم از اصولِ GP' است.

• آخرین مرحله از استنتاجِ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در GP'، از قاعده‌ی R استفاده شده است و درختِ استنتاجِ آن در GP' به یکی از فرم‌هایِ زیر است:

$$\text{R}\ \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\ \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

بنابراین طبق فرض استقراء، استنتاج‌هایِ $\mathcal{D}'_i$ در GP' برایِ $\Gamma_i, \Gamma' \Rightarrow \Delta_i, \Delta'$ وجود دارند. بنابراین یکی از استنتاج‌هایِ زیر برای $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ در GP' است:

$$\mathrm{R}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \Gamma_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta_2, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma_1, \Gamma' \Rightarrow \Delta_1, \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad\qquad \mathrm{R}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'_1\\ \Gamma_1, \Gamma' \Rightarrow \Delta_1, \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

اکنون که حکمِ (۲) را اثبات کردیم، نشان می‌دهیم اگر $GP \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ آن‌گاه $GP' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. این حکم را با استقراء رویِ استنتاجِ $GP \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ اثبات می‌کنیم:

- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل از اصولِ GP باشد. در این صورت، به وضوح $GP \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ از اصولِ GP' نیز هست.
- آخرین مرحله از استنتاجِ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در GP، از قاعده‌ای مثلِ R استفاده شده است که $\mathrm{R} \neq \mathrm{RW}$ و $\mathrm{R} \neq \mathrm{LW}$ و درختِ استنتاجِ آن در GP به یکی از فرم‌هایِ زیر است:

$$\mathrm{R}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \mathrm{R}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

در این‌صورت، طبق فرض استقراء، استنتاج‌هایِ $\mathcal{D}'_i$ برایِ $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ در GP' وجود دارد. اکنون، از آن‌جا که $\mathrm{R} \neq \mathrm{RW}$ و $\mathrm{R} \neq \mathrm{LW}$، درخت‌هایِ استنتاجِ زیر در GP' هستند:

$$\mathrm{R}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'_2\\ \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}'_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \mathrm{R}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

- آخرین مرحله از استنتاجِ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در GP، از قاعده‌ی LW استفاده شده است، یعنی درختِ استنتاجِ زیر را در GP داریم: $(\Gamma_0 \cup \{A\} = \Gamma)$

$$\mathrm{LW}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma_0 \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma_0, A \Rightarrow \Delta}$$

بنابراین، طبقِ فرضِ استقراء، درختِ استنتاجِ $\mathcal{D}'$ در GP' برایِ $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta$ وجود دارد. یعنی $GP' \vdash \Gamma_0 \Rightarrow \Delta$. حال به کمکِ حکمِ (۲) نتیجه می‌گیریم: $GP' \vdash \Gamma_0, A \Rightarrow \Delta$.

- آخرین مرحله از استنتاجِ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در GP، از قاعده‌ی RW استفاده شده است، یعنی درختِ استنتاجِ زیر را در GP داریم: $(\Delta_0 \cup \{A\} = \Delta)$

$$\mathrm{RW}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma \Rightarrow \Delta_0\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta_0, A}$$

بنابراین، طبقِ فرضِ استقراء، درختِ استنتاجِ $\mathcal{D}'$ در GP' برایِ $\Gamma \Rightarrow \Delta_0$ وجود دارد. یعنی $GP' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta_0$. حال به کمکِ حکمِ (۲) نتیجه می‌گیریم: $GP' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta_0, A$.

۱۴. الف.

$$(\neg I)_1\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{(\wedge E)\,\dfrac{[A \wedge \neg A]_1}{\neg A} \qquad (\wedge E)\,\dfrac{[A \wedge \neg A]_1}{A}}{\bot}}{\neg(A \wedge \neg A)}$$

ب.

$$
(\to I)_1\,\dfrac{(\neg I)_2\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{(\wedge E)\,\dfrac{[A\wedge\neg B]_2}{\neg B}\qquad (\to E)\,\dfrac{[A\to B]_1\qquad (\wedge E)\,\dfrac{[A\wedge\neg B]_2}{A}}{B}}{\bot}}{\neg(A\wedge\neg B)}}{(A\to B)\to\neg(A\wedge\neg B)}
$$

و برای اثبات طرف دیگر، درخت استنتاج زیر را داریم:

$$
(\to I)_1\,\dfrac{(\to I)_2\,\dfrac{(RAA)_3\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{(\wedge I)\,\dfrac{[A]_2\qquad [\neg B]_3}{A\wedge\neg B}\qquad [\neg(A\wedge\neg B)]_1}{\bot}}{B}}{A\to B}}{\neg(A\wedge\neg B)\to(A\to B)}
$$

ج. همان اصل سوم دستگاه هیلبرتی است:

$$
(\to I)_2\,\dfrac{(\to I)_1\,\dfrac{(\wedge I)\,\dfrac{[B]_2\qquad [A]_1}{A\wedge B}}{B\to(A\wedge B)}}{A\to(B\to(A\wedge B))}
$$

د.

$$
(\to I)_1\,\dfrac{(\neg I)_2\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{[A]_2\qquad (\to E)\,\dfrac{[A]_2\qquad [A\to\neg A]_1}{\neg A}}{\bot}}{\neg A}}{(A\to\neg A)\to\neg A}
$$

ه.

$$
(\to I)_1\,\dfrac{(\neg I)_2\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{(\to E)\,\dfrac{[A]_2\qquad (\wedge E)\,\dfrac{[(A\to B)\wedge(A\to\neg B)]_1}{A\to\neg B}}{\neg B}\qquad (\to E)\,\dfrac{[A]_2\qquad (\wedge E)\,\dfrac{[(A\to B)\wedge(A\to\neg B)]_1}{A\to B}}{B}}{\bot}}{\neg A}}{((A\to B)\wedge(A\to\neg B))\to\neg A}
$$

و.

$$
(\to I)_2\,\dfrac{(\to I)_3\,\dfrac{(\to I)_1\,\dfrac{(\to E)\,\dfrac{[A]_3\qquad (\to E)\,\dfrac{[(A\to B)\to(A\to C)]_2\qquad (\to I)\,\dfrac{[B]_1}{A\to B}}{A\to C}}{C}}{B\to C}}{A\to(B\to C)}}{((A\to B)\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))}
$$

ز.

$$(\to I)_1\ \dfrac{(RAA)_2\ \dfrac{(\neg E)\ \dfrac{[\neg A]_2 \qquad (\to E)\ \dfrac{[(A \to B) \to A]_1 \qquad (\to I)_3\ \dfrac{(\bot)\ \dfrac{(\neg E)\ \dfrac{[A]_3 \qquad [\neg A]_2}{\bot}}{B}}{A \to B}}{A}}{\bot}}{A}}{((A \to B) \to A) \to A}$$

۱۵.

۱۶.

۱۷. الف) تابع ارزش v را این‌طور در نظر بگیرید: $v(p_0) = 0$ و مقدار v روی دیگر اتم‌ها برابر با ۱ تعریف می‌شود. به وضوح داریم

$$I_v \models \{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$$

بنابراین این طبق قضیه صحت، مجموعه سازگار است.

ب) تابع ارزش v را این‌طور در نظر بگیرید: $v(p_1) = v(p_2) = 0, v(p_0) = 1$. و مقدار v را روی دیگر اتم‌ها دلخواه در نظر بگیرید. به وضوح داریم

$$I_v \models \{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$$

وبنابراین طبق قضیه صحت، این مجموعه سازگار است.

۱۸. با توجه به قضیه‌ی صحت، کافی است تعبیرهای I_0 و I_1 را بیابیم طوری که $I_1, I_0 \models \Gamma$ و$I_0 \not\models p_1 \to p_2$ و $I_1 \models p_1 \to p_2$ ، که در آن $\Gamma = \{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0\}$. I_0 را طوری بگیرید که $I_0(p_0) = I_0(p_1) = 1, I_0(p_2) = 0$. همچنین I_1 را طوری بگیرید که $I_1(p_0) = I_1(p_1) = I_1(p_2) = 0$. به راحتی می‌توان نشان داد که این تعبیرها دارای خواص مطلوب ما هستند.

۱۹. **توجه:** در این تمرین باید در صورت سوال اضافه شود که Δ باید دارای این خاصیت باشد که $\Delta \vdash \Gamma$. سوال بدون این شرط اضافی دارای جواب بدیهی $\Delta = \emptyset$ است.

دنباله‌ی $\Gamma = \Delta_0 \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots$ را به صورت استقرایی این طور تعریف می‌کنیم:
فرض کنید Δ_n را تعریف کرده باشیم. اگر $A \in \Delta_n$ موجود باشد طوری که $\Delta_n \setminus \{A\} \vdash A$، قرار می‌دهیم $\Delta_{n+1} := \Delta_n \setminus \{A\}$. در غیر این صورت تعریف می‌کنیم $\Delta_{n+1} = \Delta_n$. حال قرار می‌دهیم $\Delta := \bigcap_i \Delta_i$. با توجه به متناهی بودن Γ، عددی مثل n وجود دارد طوری که $\Delta = \Delta_n = \Delta_{n+1}$ و بنابراین Δ مستقل است. از طرفی بنابر تعریف استقرایی Δ_i واضح است که $\Delta_{i+1} \vdash \Delta_i$ و بنابراین داریم $\Gamma = \Delta_0 \vdash \Delta_n = \Delta$.

توجه: شرط متناهی بودن ضروری است. مثلا فرض کنید

$$\Gamma := \{\bigwedge_{0 \le n} p_i | n \in \mathbb{N}\}$$

به وضوح این مجموعه از گزاره‌ها دارای زیرمجموعه متناهی و مستقل مثل Δ با شرط $\Delta \vdash \Gamma$ نیست.

۲۰.

۲۱.

۲۲. در این جا ما حکم کلی‌تری را ثابت می‌کنیم: نشان می‌دهیم که هر مجموعه سازگار مثل Γ، که برای هر اتم مثل p، $\Gamma \vdash p$ یا $\Gamma \vdash \neg p$ ، کامل است.

برای اثبات این موضوع، با استقرا روی پیچیدگی A نشان می‌دهیم: $\Gamma \vdash A$ یا $\Gamma \vdash \neg A$.

اگر A اتمی باشد که بنا بر فرضی که برای Γ گفتیم، حکم به‌دست می‌آید.

اگر $A = A_۱ \vee A_۲$ در این صورت بنابر فرض استقرا $\Gamma \vdash A_۱$ یا $\Gamma \vdash \neg A_۱$. همچنین بنابر فرض استقرا داریم $\Gamma \vdash A_۲$ یا $\Gamma \vdash \neg A_۲$. اگر یکی از A_iها از Γ نتیجه شوند، بنابراین $\Gamma \vdash A$، و حکم به‌دست می‌آید. اگر هم هیچ‌یک از A_iها از Γ نتیجه نشوند، باید نقیض هردوی آن‌ها نتیجه شود و بنابراین $\Gamma \vdash \neg A$ و حکم به دست می‌آید.

اگر $A = A_۱ \wedge A_۲$، در این صورت طبق فرض استقرا یا هردوی A_iها از Γ نتیجه می‌شوند، که بنابراین $\Gamma \vdash A$ و حکم به‌دست می‌آید، یا لااقل نقیض یکی از آن‌ها از Γ نتیجه می‌شود که بنابراین $\Gamma \vdash \neg A$ و باز هم حکم به‌دست می‌آید.

اگر $A = \neg B$، در این صورت، بنابر فرض استقرا یا B از Γ نتیجه می‌شود یا $\neg B$، بنابر این یا A از Γ نتیجه می‌شود یا $\neg A$. بنابراین باز هم حکم به‌دست می‌آید.

اگر $A = A_۱ \to A_۲$، در این صورت طبق فرض استقرا، یا یکی از فرمول‌های $\neg A_۱, A_۲$ از Γ نتیجه می‌شود که در این صورت $\Gamma \vdash A$، یا هیچ یک از آن‌ها نتیجه نمی‌شوند که بنابراین $\Gamma \vdash A_۱$ و $\Gamma \vdash \neg A_۲$، که بنابراین در این صورت $\Gamma \vdash \neg A$.

۲۳. فرض مساله: مجموعه نامتناهی $\Gamma = \{A_۱, A_۲, \ldots\}$ از گزاره‌ها مفروض است. برای هر تعبیر مثل I، عددی مثل $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد طوری که $I \models A_n$.

حکم مساله: $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد طوری که $\vdash A_۱ \vee A_۲ \vee \ldots A \vee A_m$.

اثبات: فرض کنید حکم غلط باشد. بنابراین طبق قضیه تمامیت، برای هر m،
$\not\models A_۱ \vee A_۲ \vee \ldots \vee A_m$ وبنابراین برای هر m، مجموعه $\Delta_m = \{\neg A_۱, \neg A_۲, , \ldots, \neg A_m\}$ ارضا شدنی است. حال طبق قضیه فشردگی مجموعه $\Delta = \{\neg A_۱, \neg A_۲, \neg A_۳, \ldots\}$ ارضا شدنی است. بنابراین تعبیری مثل I وجود دارد طوری که $I \models Delta$. از طرفی طبق فرض مساله، عددی مثل n وجود دارد طوری که $I \models A_n$ و از طرف دیگر چون $I \models \Delta$ بنابراین $I \models \neg A_n$ که تناقض است.

۲۴. ایده اثبات این‌طور است که نشان می‌دهیم هر فرمول مثل $A(p,q)$ متناظر با یک تابع $f_A : \{\top,\bot\} \times \{\top,\bot\} \longrightarrow \{\top,\bot\}$ است، بنابراین به جای شمردن تعداد فرمول‌ها تعداد این توابع را می‌شماریم که برابربا ۲۴ است.

ابتدا برای هر تابع مثل $f : \{\top,\bot\} \times \{\top,\bot\} \longrightarrow \{\top,\bot\}$ جمله‌ی A_f را این طور تعریف می‌کنیم:

$$A_f := \bigvee_{(A,B)\in\{\top,\bot\}\times\{\top,\bot\}} ((p \leftrightarrow A) \wedge (q \leftrightarrow B) \wedge f(A,B))$$

یا به صورت ساده تر

$$A_f := (\neg p \wedge \neg q \wedge f(\bot,\bot)) \vee (\neg p \wedge q \wedge f(\bot,\top)) \vee (p \wedge \neg q \wedge f(\top,\bot)) \vee (p \wedge q \wedge f(\top,\top))$$

برای مثال اگر داشته باشیم $f_۰(\top,\top) = \bot, f(\top,\bot) = \top, f(\bot,\top) = \top, f(\bot,\bot) = \bot$ ، آنگاه $A_{f_۰}$ برابر خواهد بود با:

$$A_{f_۰} := (p \wedge q \wedge \top) \vee (p \wedge \neg q \wedge \top) \vee (\neg p \wedge q \wedge \top) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \bot)$$

که معادل است با: $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. حال به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر f، اگر I_f تعبیری باشد که روی p, q مانند f عمل می‌کند، I_f فقط A_f را ارضا می‌کند. به عبارت دیگر $f = g \iff I_g \models A_f$. بنابراین طبق قضایای صحت و تمامیت $\nvdash A_f \leftrightarrow A_g$. بنابراین لااقل ۲۴ فرمول غیر معادل با دو اتم p, q داریم. حال فرض کنید $A(p,q)$ فرمولی دل‌خواه با دو اتم p, q باشد. دراین صورت تابعی مثل f_A وجود دارد طوریکه برای هر $x, y \in \{\top,\bot\}$،

$$\models A[p|x, q|y] \leftrightarrow f_A(x,y) \qquad (۳)$$

حال نشان می‌دهیم: $\models A \leftrightarrow A_{f_A}$.

برای اثبات این موضوع تعبیر دل‌خواه I را در نظر بگیرید. ابتدا نشان می‌دهیم $I \models A \to A_{f_A}$. برای اثبات این مطلب فرض کنید که $I(A) = \top$. بنابراین طبق ۳ داریم $f_A(I(p), I(q)) = \top$. یعنی $I \models p \leftrightarrow I(p) \wedge q \leftrightarrow I(q) \wedge f_A(I(p), I(q))$. بنابراین $I \models A_{f_A}$.

برای اثبات طرف دیگر فرض کنید، $I \models A_{f_A}$. بنابراین $x, y \in \{\top, \bot\}$ وجود دارند طوری که $I \models (p \leftrightarrow x) \wedge (q \leftrightarrow y) \wedge f_A(x, y)$. پس $I(p) = x, I(q) = y$. بنابراین طبق ۳ داریم: $I \models A$.

بنابراین هر فرمول دیگری مثل $A(p, q)$ با یکی از فرمول‌های A_f معادل است، یعنی دقیقا همین 2^4 فرمول غیر معادل را داریم.

۲۵. الف) فرض کنید $I \models A$. در این صورت اگر $I \models p$، آنگاه $I \models A[p|\top]$. در غیر این صورت اگر $I \not\models p$ آن‌گاه $I \models A[p|\bot]$. پس در هر حال داریم $I \models A[p|\top] \vee A[p|\bot]$. بنابراین $I \models A \to A^*$.

ب) فرض کنید $A \models B$ و اتم p در B نباشد. همچنین فرض کنید $I \models A^*$. بنابراین $I \models A[p|\top]$ یا $I \models A[p|\bot]$. برای $i = ۰, ۱$، تعبیر I_i را این طور تعریف می‌کنیم که روی همه‌ی اتم‌های غیر از p مثل I عمل می‌کند و $I_i(p) = i$. با استقرا روی پیچیدگی Bـ‌هایی که اتم p در آن نباشد، به راحتی می‌توان ثابت کرد $I(B) = I_i(p)$. حال اگر داشته باشیم $I \models A[p|\top]$ ، بنابراین $I_۱ \models A$ و طبق فرض نتیجه می‌گیریم $I_۱ \models B$. بنابراین $I \models B$. اگر هم $I \models A[p|\bot]$، بنابراین $I_۰ \models A$ و بنابراین $I_۰ \models B$ ، که نتیجه می‌دهد $I \models B$. پس درهر حال داریم $I \models B$.

ج) اگر هر اتمی که در A آمده باشد در B نیز آمده باشد، قرار دهید $C = A$.

پس فرض کنید $p_۱, \ldots, p_n$ همه‌ی اتم‌هایی از A باشد که در B نیامده است. قرار دهید $A_۰ = A$ ، و همچنین $A_{i+۱} = A_i^* = A_i[p_i|\top] \vee A_i[p_i|\bot]$. حال بنا بر قسمت‌های الف و ب واضح است که $C = A_n$ دارای خواص مطلوب است.

۲۶. حد اکثر ۴ فرمول با خواص مذکور وجود دادرد و این چهار فرمول عبارتند از

$$p \wedge q, \neg p \wedge q, p \wedge \neg q, \neg p \wedge \neg q$$

ابتدا ثابت می‌کنیم هر ۴ فرمول با ۲ اتم p, q ونا متناقض که دو به دو ناسازگار باشند ، حتما همین ۴ فرمول هستند:

فرض کنید $A_۱, A_۲, A_۳, A_۴$ چهار فرمول نامتناقض و دو به دو ناسازگار باشند که با دو اتم p, q ساخته شده‌اند. چون این فرمول‌ها نامتناقض هستند، پس $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, y_۱, y_۲, y_۳, y_۴ \in \{\top, \bot\}$ وجود دارند که برای هر $۱ \leq i \leq ۴$

$$\models A_i[p|x_i, q|y_i] \leftrightarrow \top$$

از طرفی اگر $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$، تابع ارزش v را این طور تعریف می‌کنیم که $v(p) = x_i, v(q) = y_i$. حال داریم $I_v \models A_i \wedge A_j$. بنابراین چون A_i ها دو به دو ناسازگارند، نتیجه می‌گیریم $i = j$. پس (x_i, y_i) ها دو به دو متمایزند. حال چون تعداد چنین زوج‌های مرتبی حداکثر ۴ تا است پس داریم

$$\{(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), (x_۳, y_۳), (x_۴, y_۴)\} = \{\top, \bot\} \times \{\top, \bot\}$$

حال دوباره با استفاده از این مطلب که A_iـ‌ها دو به دو ناسازگارند، نتیجه می‌گیریم برای هر $i \neq j$ داریم $\models (A_i \wedge A_j) \to \bot$ و بنابر این برای تعبیری مثل I طوری که $I(p) = x_j, I(q) = y_j$، داریم $I \models (A_i \wedge A_j) \to \bot$ و بنابراین $I \models A_i[p|x_j, q|y_j] \leftrightarrow \bot$. حال چون $A_i[p|x_j, q|y_j]$ اتم ندارد پس داریم $\models A_i[p|x_j, q|y_j] \leftrightarrow \bot$. حال از روی تناظری که در پاسخ تمرین ۲۴ بین فرمول‌های با دو متغیر اتمی و تابع‌های $f : \{\top, \bot\}^۲ \longrightarrow \{\top, \bot\}$ برقرار کردیم، واضح است که چرا با یک تغییر اندیس مناسب داریم:

$$\models A_۱ \leftrightarrow (p \wedge q), \models A_۲ \leftrightarrow (p \wedge \neg q), \models A_۳ \leftrightarrow (\neg p \wedge q), \models (\neg p \wedge \neg q)$$

۲۷. طبق فرض مساله داریم: $\Sigma_۱ \cup \Sigma_۲ \vdash \bot$. بنابراین طبق تمرین ۱۰ زیرمجموعه‌های متناهی $\Delta_۱ \subseteq \Sigma_۱, \Delta_۲ \subseteq \Sigma_۲$ وجود دارند طوری که $\Delta_۱ \cup \Delta_۲ \vdash \bot$. حال قرار دهید $A := \bigwedge \Delta_۱$. به وضوح A دارای خواص مطلوب است، یعنی $\Sigma_۱ \vdash A$ و $\Sigma_۲ \vdash \neg A$.

۲۸. اگر قرار دهیم $B := A[p|\top], C := A[p|\bot]$ و تعبیر دل‌خواه I را فرض کنیم، به کمک لم ۱ حکم به راحتی به دست می‌آید.

۲۹. ابتدا فرض کنید $\vdash A(\bot) \to A(\top)$ و قرار دهید $B := A[p|\top], C := A[p|\bot]$. بنابراین $\vdash C \to B$. نشان می‌دهیم برای تعبیر دل‌خواه I داریم:

$$I \models A \leftrightarrow ((B \wedge p) \vee C)$$

اگر $I(p) = ۱$، بنابر لم ۱ داریم: $I \models A \leftrightarrow B$ و بنابراین چون $\vdash C \to B$، داریم $I \models A \leftrightarrow ((B \wedge p) \vee C)$. اگر هم $I(p) = ۰$، داریم $I \models A \leftrightarrow C$ و بنابراین $I \models A \leftrightarrow ((B \wedge p) \vee C)$. پس در هر دو صورت حکم مورد نظر برقرار است.

برای اثبات عکس مطلب، فرض کنید گزاره‌هایی مثل B, C وجود دارند طوری که $\vdash A \leftrightarrow ((B \wedge p) \vee C)$. بنابراین $\vdash A(\top) \leftrightarrow B \vee C$ و $\vdash A(\bot) \leftrightarrow C$. پس داریم: $\vdash A(\bot) \to A(\top)$.

۳۰. با استقرا روی n نشان می‌دهیم برای هر فرمول مثل $A(p_۱, \dots, p_n)$ که رده‌ی مدل‌هایش از بالا بسته است و دارای حد اکثر n متغیر اتمی $p_۱, \dots, p_n$ است، فرمولی مثل B وجود دارد طوری که فقط از اتم‌های $p_۱, \dots, p_n, \top, \bot$ و با $\vee, \wedge$ ساخته شده و $\vdash A \leftrightarrow B$.

برای حالت پایه‌ی استقرا فرض کنید A فرمولی باشد که در آن متغیر اتمی به کار نرفته است. بنابراین طبق لم ۲، می‌توان قرار داد $B := \top$ یا $B := \bot$. حال فرض کنید حکم برای n درست باشد. نشان می‌دهیم حکم برای $n+۱$ نیز درست است. فرض کنید $A(p_۱, \dots, p_n, p_{n+۱})$ فرمولی باشد که رده مدل‌هایش از بالا بسته است. بنابراین طبق تعریف به راحتی نتیجه می‌شود $\models A[p_{n+۱}|\bot] \to A[p_{n+۱}|\top]$. بنابراین طبق تمرین قبل داریم:

$$\models A \leftrightarrow ((A[p_{n+۱}|\top] \wedge p_{n+۱}) \vee A[p_{n+۱}|\bot])$$

از طرفی رده‌ی مدل‌های $A[p_{n+۱}|\bot]$ و $A[p_{n+۱}|\top]$ هردو از بالا کران‌دارند. بنابراین طبق فرض استقرا فرمول‌های $A_۱, A_۲$ وجود دارند طوری که فقط از ادوات $\vee, \wedge, \top, \bot$ و اتم‌های $p_۱, \dots, p_n$ ساخته شده‌اند و $\models A_۱ \leftrightarrow A[p_{n+۱}|\top]$ و $\models A_۲ \leftrightarrow A[p_{n+۱}|\bot]$. بنابراین داریم $\models A \leftrightarrow ((A_۱ \wedge p_{n+۱}) \vee A_۲)$ ، که همان حکم مطلوب است.

۳۱. نشان می‌دهیم $\models A(\bot) \to \sigma, \models \sigma \to A(\top)$. فرض کنید I تعبیر دل‌خواهی باشد که $I \not\models \sigma$ ، بنابراین بنابر فرض $\vdash A(\sigma) \leftrightarrow \sigma$ داریم $I \not\models A(\sigma)$. پس بنابر لم ۱، داریم $I \not\models A(\bot)$. بنابراین داریم $I \models \neg\sigma \to \neg A(\bot)$. و بنابراین $I \models A(\bot) \to \sigma$. چون I تعبیر دل‌خواه بود، بنابر قضایای صحت و تمامیت نتیجه می‌گیریم: $\vdash A(\bot) \to \sigma$.

اثبات طرف دیگر کاملا مشابه است و به خواننده واگذار می‌کنیم.

۳۲. اگر گزاره‌ای مثل σ موجود باشد که $\vdash A(\sigma) \leftrightarrow \sigma$ ، بنابر تمرین قبل داریم: $\vdash A(\bot) \to A(\top)$.

برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $\vdash A(\bot) \to A(\top)$. نشان می‌دهیم $\sigma = A(\top)$ کار می‌کند. برای اثبات این موضوع نشان می‌دهیم برای تعبیر دل‌خواه I داریم: $\models \sigma \leftrightarrow A(\sigma)$. دو حالت داریم: یا $I \models \sigma$، یا $I \not\models \sigma$. اگر $I \models \sigma$، بنابر لم ۱، می‌توان نتیجه گرفت $I \models A(\sigma) \leftrightarrow A(\top)$ و این نتیجه می‌دهد $I \models A(\sigma) \leftrightarrow \sigma$. اگر هم $I \not\models \sigma$ ، به وضوح داریم $I \models \sigma \to A(\sigma)$. از طرفی دوباره طبق لم ۱، داریم $I \models A(\sigma) \leftrightarrow A(\bot)$. حال چون $\models A(\bot) \to A(\top)$، نتیجه می‌گیریم $I \models A(\sigma) \to \sigma$.

۳۳. بنا بر تمرین قبل کافی است ثابت کنیم $\vdash A(A(\bot)) \to A(A(\top))$. برای اثبات این مطلب فرض کنید I تعبیر دل‌خواهی باشد، نشان می‌دهیم $I \models A(A(\bot)) \to A(A(\top))$. پس فرض کنید $I \models A(A(\bot))$، نشان می‌دهیم $I \models A(A(\top))$. اگر داشته باشیم $I \not\models A(\bot)$ ، طبق لم ۱،

نتیجه می‌گیریم که $I \models A(A(\bot)) \leftrightarrow A(\bot)$ ، و بنابراین نتیجه می‌گیریم :$I \models A(\bot)$ که تناقض است. بنابراین داریم $I \models A(\bot)$. بنابراین طبق لم ۱، نتیجه می‌گیریم $I \models A(A(\bot)) \leftrightarrow A(\top)$ ، بنابراین $I \models A(\top)$. حال دوباره بنابر لم ۱، نتیجه می‌گیریم $I \models A(A(\top)) \leftrightarrow A(\top)$، و بنابراین $I \models A(A(\top))$.

۳۴. برای سادگی نوشتار، فرض کنید $A^۲(p) = B(p)$. بنابر تمرین قبل داریم $\vdash B(\bot) \rightarrow B(\top)$. نشان می‌دهیم برای هر تعبیر مثل I داریم: $I \models B^۲(p) \leftrightarrow B(p)$.

اگر داشته باشیم $I \models p$، بنابر لم ۱، داریم $I \models B(p) \leftrightarrow B(\top)$ و $I \models B^۲(p) \leftrightarrow B^۲(\top)$. از طرفی طبق تمرین ۳۲، $\vdash B(B(\top)) \leftrightarrow B(\top)$. بنابراین $I \models B^۲(p) \leftrightarrow B(p)$.

پس فرض کنید $I \not\models p$. طبق لم ۱ داریم: $I \models B(p) \leftrightarrow B(\bot)$ و $I \models B(B(p)) \leftrightarrow B(B(\bot))$. دوحالت داریم: یا $I \models B(\bot)$ یا $I \not\models B(\bot)$. اگر$I \not\models B(\bot)$، طبق لم ۱ داریم $I \models B(B(\bot)) \leftrightarrow B(\bot)$. بنابراین $I \models B(B(p)) \leftrightarrow B(p)$. اگر هم داشته باشیم $I \models B(\bot)$، بنابر فرض مساله چون داریم $\vdash B(\bot) \rightarrow B(\top)$، نتیجه می‌گیریم $I \models B(\top)$ و بنابراین $I \models B(\bot) \leftrightarrow B(\top)$. از طرفی با فرض $I \models B(\bot)$ و بنابرلم ۱، داریم $I \models B(B(\bot)) \leftrightarrow B(\top)$ و بنابراین $I \models B(B(\bot)) \leftrightarrow B(\bot)$، که نتیجه می‌دهد $I \models B(B(p)) \leftrightarrow B(p)$.

حال طبق قضیه‌ی تمامیت، نتیجه می‌گیریم $\vdash B^۲ \leftrightarrow B$ یا به عبارت دیگر $\vdash A^۴ \leftrightarrow A^۲$.

مراجع

[۱] محمد اردشیر، منطق ریاضی (ویراست دوم)، انتشارات هرمس، ۱۳۸۹.