چند درخت استنتاج طبیعی و رشته‌ای

سید مجتبی مجتهدی

۲ بهمن ۱۳۹۵

۱ منطق گزاره‌ای

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A \vee B)]_{۲} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A \vee B)]_{۲} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]_{۳} \qquad [A]_{۱}}{B}\,(\to E)}{\neg A \vee B}\,(\vee I) \qquad \dfrac{\bot}{\neg A}\,(\neg I)_{۱}}{\bot}\,(\neg E)}{\neg A \vee B}\,(\vee I)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg A \vee B}\,(RAA)_{۲}}{(A \to B) \to (\neg A \vee B)}\,(\to I)_{۳}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg((A \to B) \vee (B \to A))]_{۳} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg((A \to B) \vee (B \to A))]_{۳} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_{۲}}{B \to A}\,(\to I)_{۱}}{(A \to B) \vee (B \to A)}\,\vee I \qquad [\neg((A \to B) \vee (B \to A))]_{۳}}{\bot}\,\neg E}{A \to B}\,(\to I)_{۲}}{(A \to B) \vee (B \to A)}\,\vee I}{\bot}\,\neg E}{(A \to B) \vee (B \to A)}\,(RAA)_{۳}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \to B)]_{۳} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_{۱} \qquad [\neg A]_{۲}}{\bot}\,(\neg E)}{B}\,(\bot)}{A \to B}\,(\to I)_{۱}}{\bot}\,(\neg E)}{A}\,(RAA)_{۲}}{\neg(A \to B) \to A}\,(\to I)_{۳}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_{۲} \qquad \dfrac{[(A \to B) \to A]_{۳} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_{۲} \qquad [A]_{۱}}{\bot}\,\neg E}{B}\,\bot}{A \to B}\,(\to I)_{۱}}{A}\,\to E}{\bot}\,\neg E}{A}\,(RAA)_{۲}}{((A \to B) \to A) \to A}\,(\to I)_{۳}
$$

درخت استنتاج رشته‌ای برای همان گزاره‌ی بالا:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, A}\,\mathrm{Ax}}{\Rightarrow A \to B, A}\,\mathrm{R}\to}{(A \to B) \to A \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\to}{\Rightarrow ((A \to B) \to A) \to A}\,\mathrm{R}\to
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A \vee B)]_{۳} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A \vee B)]_{۳} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_{۱} \qquad [A \to B]_{۲}}{B}\,\to E}{\neg A \vee B}\,\vee I}{\bot}\,\neg E}{\neg A}\,(\neg I)_{۱}}{\neg A \vee B}\,\vee I}{\bot}\,\neg E}{\neg(A \to B)}\,(\neg I)_{۲}}{\neg(\neg A \vee B) \to \neg(A \to B)}\,(\to I)_{۳}
$$

۲ منطق مرتبه‌اول

در درخت استنتاج زیر متغیّر x در B آزادنیست:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(B\vee\neg B)]_{۳}}{\bot}\,\neg E}{\neg B}\,(\neg I)_{۲}}{B\vee\neg B}\,\vee I}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,(RAA)_{۳}}{B\vee\neg B}\,(\vee E)_{۴} \quad \dfrac{[B]_{۴}}{\forall xA(x)\vee B} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(A(x)\vee B)]_{۵}}{A(x)\vee B}\,\forall E \quad [A(x)]_{۱}}{A(x)}\,(\vee E)_{۱}}{\forall xA(x)}\,\forall I}{\forall xA(x)\vee B}\,\vee I}{\forall xA(x)\vee B}}{\forall x(A(x)\vee B)\to(\forall xA(x)\vee B)}\,(\to I)_{۵}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x(A\to B)]_{۵}}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,(\neg I)_{۳}}{\neg B}\,\neg E \quad \dfrac{\dfrac{[B]_{۳}}{A\to B}\,\to I}{\exists x(A\to B)}\,\exists I}{\bot}\,(\exists E)_{۴} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall xA\to\exists xB]_{۶}}{\exists xB}\,\to E \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x(A\to B)]_{۵}}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,(RAA)_{۲}}{A}}{\forall xA}\,\forall I}{\exists x(A\to B)}\,\exists I}{A\to B}\,(\to I)_{۱}}{\bot}\,\neg E \quad [A]_{۱} \quad [\neg A]_{۲}}{B}}{\exists x(A\to B)}\,(RAA)_{۵}}{(\forall xA\to\exists xB)\to\exists x(A\to B)}\,(\to I)_{۶}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x(A(x)\to\forall xA(x))]_5 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]_3 \quad [\neg A(x)]_4}{\bot}\,\neg E}{\forall xA(x)}\,\bot}{A(x)\to\forall xA(x)}\,(\to I)_3}{\exists x(A(x)\to\forall xA(x))}\,\exists I}{\bot}\,\neg E}{A(x)}\,(RAA)_4}{\forall xA(x)}\,\forall I \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\exists x(A(x)\to\forall xA(x))]_5 \quad \dfrac{\dfrac{[\forall xA(x)]_2}{A(x)\to\forall xA(x)}\,(\to I)_1}{\exists x(A(x)\to\forall xA(x))}\,\exists I}{\bot}\,\neg E}{\neg\forall xA(x)}\,(\neg I)_2}{\bot}\,\neg E}{\exists x(A(x)\to\forall xA(x))}\,(RAA)_5
$$

در درخت استنتاج زیر $x \notin \mathsf{FV}(B)$ و $y \notin \mathsf{FV}(A)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\exists y(A\wedge B)]_4}{\exists y(A\wedge B)}\,\forall E \quad \dfrac{\dfrac{[A\wedge B]_2}{B}\,\wedge E}{\exists yB}\,\exists I}{\exists y(B)}\,(\exists E)_2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]_3 \quad \dfrac{\dfrac{[A\wedge B]_1}{A}\,\wedge E \quad \dfrac{[\forall x\exists y(A\wedge B)]_4}{\exists y(A\wedge B)}\,\forall E}{A}\,(\exists E)_1}{A\wedge B}\,\wedge I}{\forall x(A\wedge B)}\,\forall I}{\exists y\forall x(A\wedge B)}\,\exists I}{\exists y\forall x(A\wedge B)}\,(\exists E)_3}{\forall x\exists y(A\wedge B)\to\exists y\forall x(A\wedge B)}\,(\to I)_4
$$

در درخت استنتاجی که در ادامه می‌آید، فرض می‌کنیم $y \notin \mathsf{FV}(A)$. از آن‌جایی که $y \notin \mathsf{FV}(A)$، داریم $A[y|x] = A$ و بنابراین از قضایای کتاب نتیجه‌می‌گیریم که

$$(A[x|y])[y|x] = A[y|x][x|y[y|x]] = A[x|x] = A$$

با توجّه به تساویِ فوق، درخت استنتاج زیر را داریم:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists y\,\neg A[x|y]]_2 \quad \dfrac{[\neg A[x|y]]_1}{\exists y\,\neg A[x|y]}\,\exists I}{\bot}\,\neg E}{A[x|y]}\,(RAA)_1}{\forall y\,A[x|y]}\,\forall I}{A[x|y][y|x]}\,\forall E}{\forall x\,A}\,\forall I \quad [\neg\forall x\,A]_3}{\bot}\,\neg E}{\dfrac{\exists y\,\neg A[x|y]}{\neg\forall x\,A\to\exists y\,\neg A[x|y]}\,(\to I)_3}\,(RAA)_2
$$

با توجه به نکته‌ی بالا این فرمول برابر است با A

درخت استنتاج در حساب رشته‌ای برایِ همان گزاره:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Ax}\ \dfrac{}{\bot \Rightarrow \exists y\, \neg A[x|y]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A[x|y] \Rightarrow A[x|y], \bot}\ \text{Ax}}{\Rightarrow A[x|y], \neg A[x|y]}\ \to R}{\Rightarrow A[x|y], \exists y\, \neg A[x|y]}\ \exists R}{\Rightarrow \forall x\, A, \exists y\, \neg A[x|y]}\ \forall R}{\neg \forall x\, A \Rightarrow \exists y\, \neg A[x|y]}\ \to L}{\Rightarrow \forall x\, A \to \exists y\, \neg A[x|y]}\ \to R
$$