

پندبرهان در دستگاہ، هیلبرتی

سید، محمدی

۴ شهریور ۱۳۹۴

چکیده

در این نوشته چند برهان در دستگاہ هیلبرتی ارائه می‌کنیم.

۱ اصول دستگاہ، هیلبرتی

$$A1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3: A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

$$A4: (A \wedge B) \rightarrow A$$

$$A5: (A \wedge B) \rightarrow B$$

$$A6: (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$$

$$A7: A \rightarrow (A \vee B)$$

$$A8: B \rightarrow (A \vee B)$$

$$A9: \neg\neg A \rightarrow A$$

$$A10: (\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \wedge ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A)$$

$$A11: \forall x A \rightarrow A[x|t], \text{ in which the term } t, \text{ is free for } x \text{ in } A.$$

$$A12: \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B), \text{ in which } x \text{ is not free in } A.$$

A13: $A[x|t] \rightarrow \exists xA$, in which the term t , is free for x in A .

A14: $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow B)$, in which x is not free in B .

R1: $(A, A \rightarrow B)/B$

R2: $A/\forall xA$, in which x should not be a free variable of some formula used to deduce A .

توجه داریم که اصول ۱۰-۱ به همراه قاعده‌ی R1 ب دستگاه هیلبرتی گزاره‌ای را تشکیل می‌دهند و کلیه‌ی اصول و قواعد فوق (اصول ۱۴-۱ و قواعد R1 و R2) دستگاه هیلبرتی مرتبه‌اول را تشکیل می‌دهند.

$$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A) \quad ۲$$

1. $[B \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A))] \rightarrow [(A \wedge B) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A)))] \dots\dots\dots A1$
2. $B \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A)) \dots\dots\dots A3$
3. $(A \wedge B) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A))) \dots\dots\dots R1(1,2)$
4. $[(A \wedge B) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A)))] \rightarrow [((A \wedge B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A)))] \dots\dots\dots A2$
5. $((A \wedge B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A))) \dots\dots\dots R1(3,4)$
6. $(A \wedge B) \rightarrow B \dots\dots\dots A5$
7. $(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A)) \dots\dots\dots R1(5,6)$
8. $[(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A))] \rightarrow [((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A))] \dots\dots\dots A2$
9. $((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)) \dots\dots\dots R1(7,8)$
10. $(A \wedge B) \rightarrow A \dots\dots\dots A4$
11. $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A) \dots\dots\dots R1(9,10)$

$$\forall xA \rightarrow \neg \exists x \neg A \quad ۳$$

پیش از ادامه‌ی کار ابتدا در چند لم ، اثبات‌پذیری چند حکم را در دستگاه هیلبرتی ثابت می‌کنیم:

لم ۱ اصل-شماهای زیر در دستگاه هیلبرتی قابل اثبات است:

$$L1 \quad A \rightarrow A$$

$$L2 \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

اثبات. برای اثبات L1 به [۱]، مثال ۳,۳,۱ (صفحه ۴۳) مراجعه کنید. برای اثبات L2 ابتدا اثبات می‌کنیم

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash_{HP} A \rightarrow C$$

سپس با دو بار استفاده از قضیه ۴,۳,۱ از [۱] (صفحه ۴۳) می‌توانیم حکم مطلوب را نتیجه بگیریم. اکنون دنباله‌ی استنتاج برای $A \rightarrow C$ را با مفروضات $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C\}$ به دست می‌آوریم:

1. $A \rightarrow B$
2. $B \rightarrow C$
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ A1
4. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ R1(2,3)
5. $(A)(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ A2
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ R1(4,5)
7. $A \rightarrow C$ R1(1,6)

□

اکنون دنباله‌ی استنتاج برای $\varphi := \forall x A \rightarrow \neg \exists x \neg A$ را می‌نویسیم. در مقابل هر سطر می‌نویسیم که از کدام اصل استفاده کرده‌ایم. اگر هم از قاعده‌ای استفاده کنیم، می‌نویسیم که از کدام قاعده و کدام یک از نتایج قبلی (شماره‌ی آن سطرهایی که از نتایج آن استفاده می‌کنیم داخل پرانتز می‌نویسیم) استفاده کرده‌ایم. دقت کنید که با توجه به لم ۱، همانند استفاده از اصل-شماهای هیلبرتی می‌توانیم به راحتی از اصول L1 و L2 استفاده کنیم:

1. $(A \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp)$ L1
2. $((A \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \rightarrow (((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp))$ A2
3. $((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$ R1(6,7)
4. $A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow A)$ A1

5. $(A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow A)) \rightarrow [(((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp))]$ L2
6. $[((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)] \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp))$ R1(4,5)
7. $A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$ R1(3,6)
8. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \wedge ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A)$ A10
9. $[(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \wedge ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A)] \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp))$ A4
10. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$ R1(8,9)
11. $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)) \rightarrow [((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)]$ L2
12. $((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$ R1(10,11)
13. $(A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)) \rightarrow [(((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp))]$ L2
14. $[(((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp))]$ R1(7,13)
15. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$ R1(12,14)
16. $\forall x A \rightarrow A$ A14
17. $(\forall x A \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow (\forall x A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp))]$ L2
18. $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow (\forall x A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp))$ R1(16,17)
19. $\forall x A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$ R1(15,18)
20. $\forall x (\forall x A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp))$ R2(19)
21. $\forall x (\forall x A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x (\neg A \rightarrow \perp))$ A12
22. $\forall x A \rightarrow \forall x (\neg A \rightarrow \perp)$ R1(20,21)
23. $\forall x (\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow (\exists x \neg A \rightarrow \perp)$ A14
24. $(\forall x A \rightarrow \forall x (\neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow [(\forall x (\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow (\exists x \neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow (\forall x A \rightarrow (\exists x \neg A \rightarrow \perp))]$ L2
25. $(\forall x (\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow (\exists x \neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow (\forall x A \rightarrow (\exists x \neg A \rightarrow \perp))$ R1(22,24)
26. $\forall x A \rightarrow (\exists x \neg A \rightarrow \perp)$ R1(23,25)

27. $(\neg\exists x\neg A \rightarrow (\exists x\neg A \rightarrow \perp)) \wedge ((\exists x\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\exists x\neg A) \dots\dots\dots A10$
28. $((\neg\exists x\neg A \rightarrow (\exists x\neg A \rightarrow \perp)) \wedge ((\exists x\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\exists x\neg A)) \rightarrow ((\exists x\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\exists x\neg A) \dots\dots\dots A5$
29. $(\exists x\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\exists x\neg A \dots\dots\dots R1(27,28)$
30. $(\forall xA \rightarrow (\exists x\neg A \rightarrow \perp)) \rightarrow [((\exists x\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\exists x\neg A) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \neg\exists x\neg A)] \dots\dots\dots L2$
31. $((\exists x\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\exists x\neg A) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \neg\exists x\neg A) \dots\dots\dots R1(26,30)$
32. $\forall xA \rightarrow \neg\exists x\neg A \dots\dots\dots R1(29,31)$

مراجع

[۱] محمد اردشير، منطق رياضي (ويراست دوم)، انتشارات هرمس، ۱۳۸۹.