حساب رشته‌ای روی مجموعه‌ها

سید مجتبی مجتهدی

۲۵ آبان ۱۳۹۵

۱ اصول و قواعد دستگاه حساب رشته‌ای GP

در این دستگاه، Γ و Δ دو **مجموعه‌ی مکرّر** فرض می‌شوند، یعنی مجموعه‌هایی که در آن‌ها تکرار مجاز است ولی ترتیب در آن‌ها اهمّیت ندارد. هم‌چنین منظور از Γ, A مجموعه‌ی مکرّرِ $\Gamma \cup \{A\}$ است.

- اصول موضوعه

$$A \Rightarrow A \qquad\qquad \bot \Rightarrow A$$

- قواعد ساختاری

$$\mathrm{LW}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \mathrm{RW}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

$$\mathrm{LC}\,\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \mathrm{RC}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

- قواعد منطقی ($i \in \{۱, ۲\}$)

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Gamma, A_i \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_۱ \wedge A_۲ \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \wedge\mathrm{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\vee\mathrm{L}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \vee\mathrm{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_۱ \vee A_۲}$$

$$\to\mathrm{L}\,\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \to\mathrm{R}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

۲ اصول و قواعد دستگاه حساب رشته‌ای GP'

در این دستگاه، Γ و Δ دو **مجموعه** فرض می‌شوند، یعنی مجموعه‌هایی که در آن‌ها تکرار مجاز نیست و ترتیب در آن‌ها اهمّیت ندارد. هم‌چنین منظور از Γ, A مجموعه‌ی $\Gamma \cup \{A\}$ است. بنابراین به‌طورِ خاص در قاعده‌ی $\wedge$L لزومی ندارد که داشته باشیم $A_i \notin \Gamma$. به‌طور مشابه برای قاعده‌ی $\vee$R ممکن است که $A_i \in \Delta$ برقرار باشد.

- اصول موضوعه

$$\Gamma, A \Rightarrow \Delta, A \qquad\qquad \Gamma, \bot \Rightarrow \Delta$$

- قواعد منطقی ($i \in \{۱, ۲\}$)

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Gamma, A_i \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A_۱ \wedge A_۲ \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \wedge\mathrm{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\vee\mathrm{L}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \vee\mathrm{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_۱ \vee A_۲}$$

$$\to\mathrm{L}\,\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \to\mathrm{R}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

قضیه ۱ *قواعد تضعیف راست و چپ به دستگاه GP' قابلِ اضافه شدن است. یعنی اضافه کردنِ قواعدِ زیر به دست‌گاه GP' موجبِ قوی‌تر شدن آن نمی‌شود (قضایایِ جدیدی تولید نمی‌کند.)*

$$LW\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad RW\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

اثبات. فرض کنید GP'' دستگاهِ GP' به‌علاوه‌ی تضعیف چپ و راست (دو قاعده‌ی بالا) باشد. به وضوح اگر $\mathsf{GP}' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ آن‌گاه $\mathsf{GP}'' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. حالا با استقرا رویِ طولِ برهانِ $\mathsf{GP}' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ برای هر $\Gamma' \supseteq \Gamma$ و $\Delta' \supseteq \Delta$ ثابت می‌کنیم که $\mathsf{GP}' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ نتیجه می‌دهد $\mathsf{GP}' \vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. به‌راحتی می‌توان دید که این مطلب نتیجه می‌دهد

$$\text{اگر} \qquad \mathsf{GP}'' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \text{آن‌گاه} \qquad \mathsf{GP}' \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$$

- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل باشد: در این‌صورت $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ نیز یک اصلِ GP' است.

- در گام آخرِ استنتاج از قاعده‌ی $L\wedge$ استفاده کرده‌ایم:

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \Gamma, A \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}$$

که در آن $\overset{\mathcal{D}}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$ یک استنتاج با طولِ برهانِ کمتر از برهانِ فوق است. بنابراین طبق فرض استقرا یک برهان مثلِ $\overset{\mathcal{D}'}{\Gamma', A \Rightarrow \Delta'}$ را داریم. پس برهانِ زیر را در GP' داریم:

$$\wedge\mathrm{L}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}'}{\Gamma', A \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma', A \wedge B \Rightarrow \Delta'}$$

- مابقیِ حالت‌ها مشابه حالت قبل است و به خواننده واگذار می‌شود. □

قضیه‌ی صحت برای دستگاهِ GP' به‌راحتی با استقرا رویِ طولِ برهان ثابت می‌شود:

قضیه ۲ *GP' صحیح است، یعنی برای هر Γ و Δ متناهی، اگر $\vdash_{\mathsf{GP}'} \Gamma \Rightarrow \Delta$ آن‌گاه $\models \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$.*

۳ GP و GP' با هم معادلند

اگر Γ یک مجموعه‌ی مکرّر باشد، $\hat{\Gamma}$ را به عنوان مجموعه‌ای در نظر میگیریم که اعضایش دقیقاً برابر با اعضای Γ باشد ولی بدون تکرار (مجموعه‌ی معمولی). همچنین اگر Γ یک مجموعه‌ی معمولی باشد (غیر مکرّر)، در این‌صورت واضح است که می‌توان Γ را به‌عنوان یک مجموعه‌ی مکرّر در نظر گرفت که در آن هیچ عضو تکراری‌ای وجود ندارد. حالا این دو قضیّه را داریم:

قضیه ۳ *برای هر دو مجموعه‌ی متناهی و مکرّر Γ و Δ از گزاره‌ها،*

$$\vdash_{\mathsf{GP}} \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Longrightarrow \qquad \vdash_{\mathsf{GP}'} \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}$$

اثبات. حکم را با استقرا رویِ طولِ درختِ برهانِ $\vdash_{\mathsf{GP}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ اثبات می‌کنیم.

- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل باشد. در این صورت به‌وضوح $\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}$ نیز یک اصل از دستگاهِ GP' است.

- RW: (یعنی فرض کنید آخرین گام در درخت برهان از قاعده‌ی تضعیفِ راست استفاده کرده باشیم) در این‌صورت داریم $\mathrm{LW}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$ که در آن $\mathcal{D}$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت برهانی مثل $\mathcal{D}'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}}$. حالا طبق قضیه ۱ یک برهان در GP' برای $\hat{\Gamma}, A \Rightarrow \hat{\Delta}$ داریم.

- LW: در این‌صورت داریم $\mathrm{RW}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ که در آن $\mathcal{D}$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت برهانی مثل $\mathcal{D}'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}}$. حالا طبق قضیه ۱ یک برهان در GP' برای $\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A$ داریم.

- LC: در این‌صورت داریم $\mathrm{LC}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}$ که در آن $\mathcal{D}$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت برهانی مثل $\mathcal{D}'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma}, A \Rightarrow \hat{\Delta}}$، که همان حکم استقرا است.

- RC: در این‌صورت داریم $\mathrm{RC}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ که در آن $\mathcal{D}$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت برهانی مثل $\mathcal{D}'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A}$ ، که همان حکم استقرا است.

- $\wedge$L: در این‌صورت داریم $\wedge\mathrm{L}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma, A_i \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}$ که در آن $\mathcal{D}$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت برهانی مثل $\mathcal{D}'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma}, A_i \Rightarrow \hat{\Delta}}$. بنابراین درخت برهانِ زیر را در GP' داریم:

$$\wedge\mathrm{L}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma}, A_i \Rightarrow \hat{\Delta}}}{\hat{\Gamma}, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \hat{\Delta}}$$

- $\wedge$R: در این‌صورت داریم $\wedge\mathrm{R}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_1} \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_2}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_1 \wedge A_2}$ که در آن $\mathcal{D}_i$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت‌های برهانی مثل $\mathcal{D}'_i$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'_i}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A_i}$. بنابراین درخت برهانِ زیر را در GP' داریم:

$$\wedge\mathrm{R}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}'_1}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A_1} \qquad \overset{\mathcal{D}'_2}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A_2}}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A_1 \wedge A_2}$$

- $\vee$L: در این‌صورت داریم $\vee\mathrm{L}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\Gamma, A_1 \Rightarrow \Delta} \qquad \overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma, A_2 \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \Delta}$ که در آن $\mathcal{D}_i$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت‌های برهانی مثل $\mathcal{D}'_i$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'_i}{\hat{\Gamma}, A_i \Rightarrow \hat{\Delta}}$. بنابراین درخت برهانِ زیر را در GP' داریم:

$$\vee\mathrm{L}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}'_1}{\hat{\Gamma}, A_1 \Rightarrow \hat{\Delta}} \qquad \overset{\mathcal{D}'_2}{\hat{\Gamma}, A_2 \Rightarrow \hat{\Delta}}}{\hat{\Gamma}, A_1 \vee A_2 \Rightarrow \hat{\Delta}}$$

- $\vee$R: در این‌صورت داریم $\vee\mathrm{R}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_1 \vee A_2}$ که در آن $\mathcal{D}$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت برهانی مثل $\mathcal{D}'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A_i}$. بنابراین درخت برهانِ زیر را در GP' داریم:

$$\vee\mathrm{R}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}'}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A_i}}{\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta}, A_1 \vee A_2}$$

- $\to$L: در این‌صورت داریم $\to\mathrm{L}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\qquad\overset{\mathcal{D}_2}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A}}{A\to B,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ که در آن $\mathcal{D}_i$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت‌های برهانی مثل $\mathcal{D}_i'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}_1'}{B,\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta}$ و $\overset{\mathcal{D}_2'}{\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta,A}$. بنابراین درخت برهانِ زیر را در GP' داریم:

$$\to\mathrm{L}\,\frac{\overset{\mathcal{D}_1'}{B,\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta}\qquad\overset{\mathcal{D}_2'}{\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta,A}}{A\to B,\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta}$$

- $\to$R: در این‌صورت داریم $\to\mathrm{R}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{A,\Gamma\Rightarrow\Delta,B}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\to B}$ که در آن $\mathcal{D}$ یک درخت برهان در GP است. طبق فرض استقرا درخت برهانی مثل $\mathcal{D}'$ در GP' داریم طوری‌که $\overset{\mathcal{D}'}{A,\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta,B}$. بنابراین درخت برهانِ زیر را در GP' داریم:

$$\to\mathrm{R}\,\frac{\overset{\mathcal{D}'}{\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta,A_i}}{\hat\Gamma\Rightarrow\hat\Delta,A\to B}$$

$\square$

قضیه ۴ *برای هر دو مجموعه‌ی متناهی و غیرمکرّر Γ و Δ از گزاره‌ها،*

$$\vdash_{\mathsf{GP}'}\Gamma\Rightarrow\Delta\qquad\Longrightarrow\qquad\vdash_{\mathsf{GP}}\Gamma\Rightarrow\Delta$$

اثبات. فرض کنید که $\vdash_{\mathsf{GP}'}\Gamma\Rightarrow\Delta$. بنابراین طبق قضیّه‌ی صحّت (قضیه ۲) داریم $\models\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$. بنابراین طبق تمامیّت دستگاه GP داریم $\mathsf{GP}\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$. $\square$

توجّه ۵ *می‌توان یک اثبات استقرایی مشابه آن‌چه در قضیه ۳ انجام دادیم برای قضیه‌ی بالا ارائه داد.*

$$Cut\,\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\qquad A,\Gamma'\Rightarrow\Delta'}{\Gamma\cup\Gamma'\Rightarrow\Delta\cup\Delta'}$$

قضیه ۶ *دستگاه GP' حذف برش دارد، یعنی اگر $\mathsf{GP}'+Cut\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$ آن‌گاه $\mathsf{GP}'\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$.*

اثبات. فرض کنید که $\mathsf{GP}'+Cut\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$. با توجّه به این‌که قاعده‌ی برش صحیح است می‌توان به کمک قضیه ۲ نتیجه گرفت $\models\bigwedge\Gamma\to\bigvee\Delta$ و بنابراین طبق تمامیّتِ GP داریم $\mathsf{GP}\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$. پس طبق قضیه ۳ داریم $\mathsf{GP}'\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$. $\square$