



## پرسش‌های مبانی منطق

دکتر مجتهدی

بهار ۹۹

سری: چهار

مهلت تحویل: دوشنبه، ۲۲ اردیبهشت

۱. فرض کنید  $\mathcal{M} = (M, R^2, F^1)$  یک ساختار باشد. ابتدا یک  $\mathcal{M}$ -زبان مانند  $\mathcal{L}$  معرفی کنید. سپس هر یک از جملات زیر را به این زبان برگردانید.
- آ. جهان  $M$  دقیقاً یک عضو دارد.
  - ب. جهان  $M$  دقیقاً دو عضو دارد.
  - پ. رابطه  $R$  یک تابع است.
  - ت. رابطه  $R$  تابع بوده و با  $F$  برابر است.
  - ث. رابطه  $R$  یک تابع یک‌به‌یک است.
  - ج. تابع  $F$  یک تابع پوشا است.
۲. برای هر یک از جملات زیر مانند  $A$ ، نشان دهید  $\vdash_{NQ} A$  یا نشان دهید هیچ یک از این دو درست نیستند، یعنی  $\not\vdash_{NQ} A$  و  $\not\vdash_{NQ} \neg A$ .
- راهنمایی.** برای اثبات حقیقتی به شکل  $\not\vdash_{NQ} A$  می‌توانید مدل نقضی مانند  $\mathcal{M}$  معرفی کنید که  $A$  در  $\mathcal{M}$  راست نباشد، و به کمک قضیه صحت و برهان خلف نتیجه بگیرید  $A$  قابل اثبات نیست.

i.  $\forall xP(x) \wedge \exists x\neg P(x)$

ii.  $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

iii.  $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

۳. برای هر یک از گزاره‌های زیر برهانی در دستگاه استنتاج طبیعی ارائه دهید.

i.  $\exists x\forall yA \rightarrow \forall y\exists xA$

ii.  $((\exists xA) \rightarrow B) \rightarrow \forall x(A \rightarrow B) \quad (x \notin FV(B))$

iii.  $\neg\exists x\neg A \rightarrow \forall xA$

iv.  $\neg\forall x\neg A \rightarrow \exists xA$

۴. درستی هر یک از جملات زیر را تعیین کنید.

آ. نام  $x$  برای متغیر  $x$  در فرمول دلخواه  $A$  آزاد است.

- ب. نام  $x + y$  برای متغیر  $x$  در فرمول  $(\forall y \exists z y \leq z) \wedge (\forall w x < w)$  آزاد است.
- پ. نام دلخواه  $t$  برای متغیر  $x$  در فرمول  $\exists x B$  که در آن  $B$  دلخواه است، آزاد است.
- ت. نام  $y$  برای متغیر  $x$  در فرمول  $\exists y(y + x + w = 0)$  آزاد است.
- ث.  $(A[x|t])[y|s] = (A[y|s])[x|t]$ .
- ج.  $(A[x|t])[y|s] = A[x|t][y|s]$ .
- چ.  $(A[x|t])[y|s] = (A[y|s])[x|t][y|s]$ .
۵. جانشینی‌های زیر را انجام دهید.

- i.  $(\exists x x + y = 0 \vee \forall z, x > 0)[x|y + x]$
- ii.  $(\exists x x = y)[y|z + 0]$
- iii.  $(\exists x (x \neq y \vee \forall z x \approx y))[y|\bar{c}]$

۶. فرم نرمال پیشوندی فرمول‌های زیر را به دست آورید.

- i.  $\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x B(x)$
- ii.  $\neg(\exists x A(x, y) \wedge (\forall y B(y) \rightarrow A(x, x)) \rightarrow \exists x \forall y C(x, y))$
- iii.  $((\forall x A(x) \rightarrow \exists y B(x, y)) \rightarrow B(x, x)) \rightarrow \exists x \forall y C(x, y)$

\*۷. جمله زیر را به زبان منطق مرتبه اول برگردانید. سپس برهانی در دستگاه استنتاج طبیعی برای آن ارائه دهید.

«در کلاس مبانی منطق ارائه شده در بهار ۹۹ در دانشگاه تهران، شخصی مانند آ وجود دارد که اگر آ نمره کامل را در این درس کسب کند، همه کلاس نمره کامل را کسب می‌کنند.»

\*۸. مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$\Gamma = \{\forall x(A \vee B) \rightarrow \forall x A \vee \forall x B | A, B \in \text{FRM}\} \cup \{\exists x \exists y x \neq y\}$$

آ. نشان دهید  $\Gamma \vdash_{NQ} \perp$ .

ب. نشان دهید هیچ ساختاری مانند  $\mathcal{M}$  وجود ندارد که  $\mathcal{M} \models \Gamma$ .

\* تمارینی که با علامت ستاره مشخص شده‌اند به عنوان تمرین امتیازی آمده و نمره‌ای اضافه بر نمره اصلی دارند.

تدریس یارها:

مهرداد ریاحی و کامیار میرزاوزیری