پاسخ پرسش‌های مبانی منطق

دکتر مجتهدی

بهار ۹۹

سری: **دو**

۱.

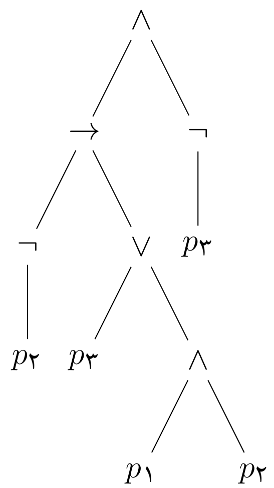
$i)$ $p_1, p_2, p_3,$

$\neg p_2, (p_1 \wedge p_2), \neg p_3,$

$(p_3 \vee (p_1 \wedge p_2)),$

$(\neg p_2 \to (p_3 \vee (p_1 \wedge p_2))),$

$(\neg p_2 \to (p_3 \vee (p_1 \wedge p_2))) \wedge \neg p_3.$



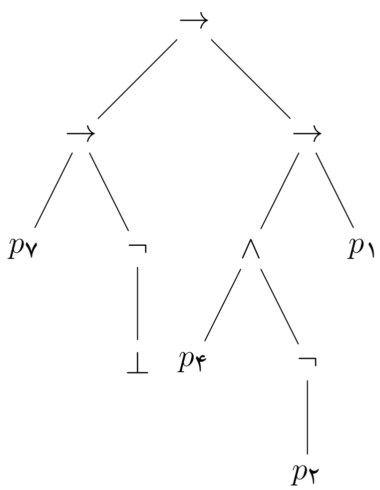
$ii)$ $p_1, p_2, p_4, p_7, \perp,$

$\neg p_2, \neg\perp,$

$(p_7 \to \neg\perp), (p_4 \wedge \neg p_2),$

$((p_4 \wedge \neg p_2) \to p_1),$

$(p_7 \to \neg\perp) \to ((p_4 \wedge \neg p_2) \to p_1).$

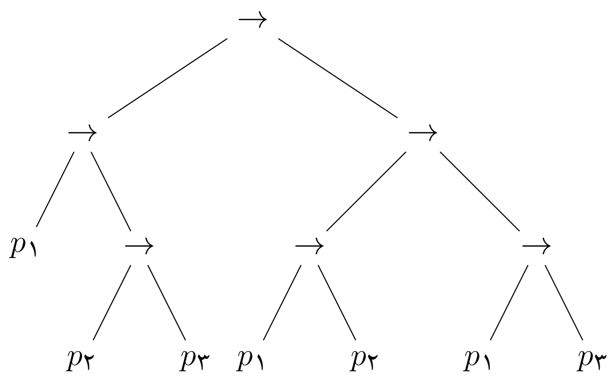


$iii)\quad p_۱, p_۲, p_۳$

$(p_۱ \to p_۲), (p_۲ \to p_۳), (p_۱ \to p_۳),$

$(p_۱ \to (p_۲ \to p_۳)), ((p_۱ \to p_۲) \to (p_۱ \to p_۳)),$

$(p_۱ \to (p_۲ \to p_۳)) \to ((p_۱ \to p_۲) \to (p_۱ \to p_۳)).$



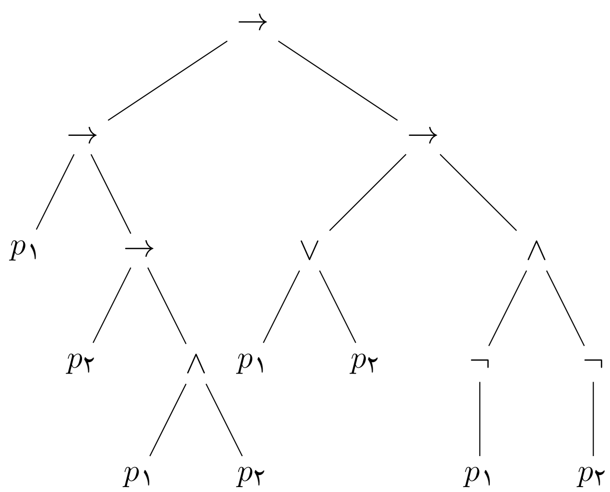
$iv)\quad p_۱, p_۲$

$\neg p_۱, \neg p_۲, (p_۱ \wedge p_۲), (p_۱ \vee p_۲),$

$(p_۲ \to (p_۱ \wedge p_۲)), (\neg p_۱ \wedge \neg p_۲),$

$(p_۱ \to (p_۲ \to (p_۱ \wedge p_۲))), ((p_۱ \vee p_۲) \to (\neg p_۱ \wedge \neg p_۲)),$

$(p_۱ \to (p_۲ \to (p_۱ \wedge p_۲))) \to ((p_۱ \vee p_۲) \to (\neg p_۱ \wedge \neg p_۲)).$



۲.

$$i) \quad v(p_i) = \begin{cases} ۱ & i = ۲ \\ ۰ & \text{else} \end{cases} \qquad v'(p_i) = \begin{cases} ۱ & i = ۳ \\ ۰ & \text{else} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& I_v((\neg p_۲ \to (p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))) \wedge \neg p_۳) \\
= \;& I_v(\neg p_۲ \to (p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))).I_v(\neg p_۳) \\
= \;& (۱ - I_v(\neg p_۲) + I_v(\neg p_۲).I_v(p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))).(۱ - I_v(p_۳)) \\
= \;& (۱ - (۱ - I_v(p_۲)) + (۱ - I_v(p_۲)).I_v(p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))).(۱ - ۰) \\
= \;& ۱ - (۱ - ۱) + (۱ - ۱).I_v(p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲)) \\
= \;& ۱.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{v'}((\neg p_۲ \to (p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))) \wedge \neg p_۳) \\
= \;& I_{v'}(\neg p_۲ \to (p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))).I_{v'}(\neg p_۳) \\
= \;& I_{v'}(\neg p_۲ \to (p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))).(۱ - I_{v'}(p_۳)) \\
= \;& I_{v'}(\neg p_۲ \to (p_۳ \vee (p_۱ \wedge p_۲))).(۱ - ۱) \\
= \;& ۰.
\end{aligned}$$

$$ii) \quad v(p_i) = \begin{cases} ۱ & i = ۱ \\ ۰ & \text{else} \end{cases} \qquad\qquad v'(p_i) = \begin{cases} ۱ & i = ۴ \\ ۰ & \text{else} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& I_v((p_{۷} \to \neg\bot) \to ((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱})) \\
= \; & ۱ - I_v(p_{۷} \to \neg\bot) + I_v(p_{۷} \to \neg\bot).I_v((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱}) \\
= \; & ۱ - ۱ + ۱.I_v((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱}) \\
= \; & I_v((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱}) \\
= \; & ۱ - I_v(p_{۴}).I_v(\neg p_{۲}) + I_v(p_{۴}).I_v(\neg p_{۲}).I_v(p_{۱}) \\
= \; & ۱ - ۰.I_v(\neg p_{۲}) + ۰.I_v(\neg p_{۲}).I_v(p_{۱}) \\
= \; & ۱.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{v'}((p_{۷} \to \neg\bot) \to ((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱})) \\
= \; & ۱ - I_{v'}(p_{۷} \to \neg\bot) + I_{v'}(p_{۷} \to \neg\bot).I_{v'}((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱}) \\
= \; & ۱ - ۱ + ۱.I_{v'}((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱}) \\
= \; & I_{v'}((p_{۴} \wedge \neg p_{۲}) \to p_{۱}) \\
= \; & ۱ - I_{v'}(p_{۴}).I_{v'}(\neg p_{۲}) + I_{v'}(p_{۴}).I_{v'}(\neg p_{۲}).I_{v'}(p_{۱}) \\
= \; & ۱ - ۱.I_{v'}(\neg p_{۲}) + ۱.I_{v'}(\neg p_{۲}).۰ \\
= \; & ۱ - (۱ - I_{v'}(p_{۲})) \\
= \; & ۱ - (۱ - ۰) \\
= \; & ۰.
\end{aligned}$$

مقدار I را مستقل از v به دست می‌آوریم لذا با تغییر v، تغییری در وضعیت I ایجاد نمی‌شود.
ابتدا مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم. (*توضیح. مقدار* $I(p_i)$ *را با* x_i *نشان می‌دهیم.*)

$$
\begin{aligned}
I(p_۱ \to p_۲) &= ۱ - x_۱ + x_۱ x_۲. \\
I(p_۲ \to p_۳) &= ۱ - x_۲ + x_۲ x_۳. \\
I(p_۱ \to p_۳) &= ۱ - x_۱ + x_۱ x_۳. \\
I(p_۱ \to (p_۲ \to p_۳)) &= ۱ - x_۱ + x_۱ . I(p_۲ \to p_۳) \\
&= ۱ - x_۱ + x_۱ .(۱ - x_۲ + x_۲ x_۳) \\
&= ۱ - x_۱ + x_۱ - x_۱ . x_۲ + x_۱ x_۲ x_۳ \\
&= ۱ - x_۱ x_۲ + x_۱ x_۲ x_۳ = y. \\
I((p_۱ \to p_۲) \to (p_۱ \to p_۳)) &= ۱ - I(p_۱ \to p_۲) + I(p_۱ \to p_۲). I(p_۱ \to p_۳) \\
&= ۱ - (۱ - x_۱ + x_۱ x_۲) + (۱ - x_۱ + x_۱ x_۲).(۱ - x_۱ + x_۱ x_۳) \\
(\text{توجه کنیم } x_i = x_i^۲) &= x_۱ - x_۱ x_۲ + (۱ - x_۱ + x_۱ x_۲ x_۳) \\
&= ۱ - x_۱ x_۲ + x_۱ x_۲ x_۳ = y.
\end{aligned}
$$

حال داریم

$$
\begin{aligned}
iii) &\quad I((p_۱ \to (p_۲ \to p_۳)) \to ((p_۱ \to p_۲) \to (p_۱ \to p_۳))) \\
&= ۱ - y + y^۲ \\
(\text{توجه کنیم } y = y^۲) &= ۱ - y + y \\
&= ۱.
\end{aligned}
$$

$$iv)\quad v(p_i) = ۰ \qquad\qquad v'(p_i) = \begin{cases} ۱ & i = ۱ \\ ۰ & \text{else} \end{cases}$$

ابتدا مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم. (*توضیح. مقدار* $I(p_i)$ *را با* x_i *نشان می‌دهیم.*)

$$\begin{aligned}
I(p_۱ \to (p_۲ \to (p_۱ \wedge p_۲))) &= ۱ - x_۱ + x_۱(۱ - x_۲ + x_۲ I(p_۱ \wedge p_۲)) \\
&= ۱ - x_۱ + x_۱(۱ - x_۲ + x_۱ x_۲) \\
&= ۱. \\
I((p_۱ \vee p_۲) \to (\neg p_۱ \wedge \neg p_۲)) &= ۱ + I(p_۱ \vee p_۲)(-۱ + I(\neg p_۱ \wedge \neg p_۲)) \\
&= ۱ + (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)(-۱ + I(\neg p_۱) I(\neg p_۲)) \\
&= ۱ + (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)(-۱ + (۱ - x_۱)(۱ - x_۲)) \\
&= ۱ + (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)(-۱ + (۱ - x_۱ - x_۲ + x_۱ x_۲)) \\
&= ۱ + (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)(-x_۱ - x_۲ + x_۱ x_۲) \\
&= ۱ + (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)(-۱)(x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲) \\
&= ۱ - (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)^۲.
\end{aligned}$$

حال داریم

$$\begin{aligned}
& I((p_۱ \to (p_۲ \to (p_۱ \wedge p_۲))) \to ((p_۱ \vee p_۲) \to (\neg p_۱ \wedge \neg p_۲))) \\
= \;& ۱ - ۱ + ۱.I((p_۱ \vee p_۲) \to (\neg p_۱ \wedge \neg p_۲)) \\
= \;& ۱ - (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)^۲.
\end{aligned}$$

اگر تابع ارزش v را در نظر بگیریم داریم

$$\begin{aligned}
& ۱ - (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)^۲ \\
= \;& ۱ - (۰ + ۰ - ۰)^۲ \\
= \;& ۱.
\end{aligned}$$

و اگر v' را در نظر بگیریم داریم

$$\begin{aligned}
& ۱ - (x_۱ + x_۲ - x_۱ x_۲)^۲ \\
= \;& ۱ - (۱ + ۰ - ۰)^۲ \\
= \;& ۰.
\end{aligned}$$

۳. به برهان خلف فرض کنیم $B \notin sub(A)$. یکی از کوتاه‌ترین دنباله ساختمان‌های A که شامل B هم باشد را در نظر می‌گیریم. هر عنصری از دنباله که متعلق به $sub(A)$ نیست از آن حذف می‌کنیم، ادعا می‌کنیم دنباله ساختمان جدیدی که به وجود می‌آید که همچنان معتبر است و از آنجا که B حتما در این دنباله بوده و حذف شده، این دنباله از دنبالهٔ قبلی اکیدا کوتاه‌تر است و به تناقض می‌رسیم.

می‌دانیم دنباله قبلی دو خاصیت زیر را داشته.

i) آخرین عنصر دنباله A بوده.

ii) هر عنصر دنباله حاصل یک عملگر روی عباراتی است که پیش از آن در دنباله آمده‌اند.

کافی است نشان دهیم دنباله جدید همچنان هر دو خاصیت را دارد.

i) می‌دانیم $A \in sub(A)$. لذا هیچ یک از عناصری که حذف کردیم نمی‌تواند A باشد و با حذف آن‌ها عنصر A در دنباله باقی می‌ماند.

ii) به برهان خلف فرض کنیم شرط دوم برقرار نباشد یعنی عبارتی مانند C در دنباله باشد که از روی عبارتی مانند D ساخته می‌شود اما D در دنباله نیست. می‌دانیم این دنباله قبلا معتبر بوده یعنی D قبل از C حضور داشته و حال حذف شده. یعنی $\underline{D \notin sub(A)}$ از طرفی می‌دانیم $D \in sub(C)$ و از آنجا که C هنوز در دنباله مانده $C \in sub(A)$ لذا $\underline{D \in sub(A)}$ (چرا؟) که تناقض است. پس شرط دوم نیز برقرار است.

پس دنباله جدید واقعا معتبر است و از دنباله قبلی کوتاه‌تر است که تناقض است لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴. ($\Leftarrow$) ابتدا فرض کنیم i برقرار است. این موضوع یعنی برای هر تابع ارزش v داریم $I_v(A) = I_v(B)$. برای اثبات ii باید نشان دهیم برای هر تابع ارزش v داریم $I_v(A \leftrightarrow B) = ۱$. فرض کنیم v یک تابع ارزش دلخواه باشد. طبق فرض می‌دانیم $I_v(A) = I_v(B) = t$. همچنین از آنجا که $t \in \{۰, ۱\}$ داریم $t = t^۲$. برای اثبات حکم داریم

$$\begin{aligned}
I_v(A \leftrightarrow B) &= I_v((A \to B) \wedge (B \to A)) \\
&= I_v(A \to B) I_v(B \to A) \\
&= (۱ - I_v(A) + I_v(A)I_v(B))(۱ - I_v(B) + I_v(B)I_v(A)) \\
&= (۱ - t + t^۲)(۱ - t + t^۲) \\
&= (۱ - t + t)(۱ - t + t) \\
&= (۱)(۱) \\
&= ۱.
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) حال فرض کنیم ii برقرار است و می‌خواهیم i را ثابت کنیم. به برهان خلف فرض کنیم i برقرار نباشد. یعنی تابع ارزشی مانند $v_۰$ وجود دارد که $I_{v_۰}(A) \neq I_{v_۰}(B)$. به عبارت دیگر $I_{v_۰}(A) = ۱ - I_{v_۰}(B)$.

$I_{v_0}(A)$ را t می‌نامیم و ادعا می‌کنیم $I_{v_0}(A \leftrightarrow B) = 0$ و لذا $A \leftrightarrow B$ همانگو نیست. برای اثبات داریم

$$\begin{aligned}
I_{v_0}(A \leftrightarrow B) &= I_{v_0}((A \to B) \wedge (B \to A)) \\
&= I_{v_0}(A \to B) I_{v_0}(B \to A) \\
&= (1 - I_{v_0}(A) + I_{v_0}(A) I_{v_0}(B))(1 - I_{v_0}(B) + I_{v_0}(B) I_{v_0}(A)) \\
&= (1 - t + t(1-t))(1 - (1-t) + (1-t)t) \\
&= (1 - t + (t - t^2))(t + (t - t^2)) \\
&= (1-t)(t) \\
&= (t - t^2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵. ($\Leftarrow$) ابتدا فرض کنیم i برقرار است. این موضوع یعنی برای هر تابع ارزش v داریم $1 - I_v(A)(1 - I_v(B)) = 1$ یا به عبارت دیگر $I_v(A)(1 - I_v(B)) = 0$. برای اثبات ii باید نشان دهیم برای هر تابع ارزش v، اگر $I_v(A) = 1$ در این صورت $I_v(B) = 1$. فرض کنیم v یک تابع ارزش دلخواه باشد به طوری که $I_v(A) = 1$. طبق فرض $I_v(A)(1 - I_v(B)) = 0$ لذا $1 - I_v(B) = 0$ پس $I_v(B) = 1$.

($\Rightarrow$) حال فرض کنیم ii برقرار است و می‌خواهیم i را ثابت کنیم. می‌دانیم برای هر تابع ارزش v، اگر $I_v(A) = 1$ در این صورت $I_v(B) = 1$. با توجه به بالا کافی است نشان دهیم $I_v(A)(1 - I_v(B)) = 0$. فرض کنیم v یک تابع ارزش دلخواه باشد. اگر $I_v(A) = 0$ حکم ثابت شده است، در غیر این صورت با توجه به فرض $I_v(B) = 1$ لذا $(1 - I_v(B)) = 0$ و حکم ثابت است.

۶. ابتدا مثالی ارائه می‌دهیم که i در مورد آن نادرست است اما ii درست است. فرض کنید

$$A = p_1; \qquad B = p_2.$$

در این صورت جمله اول درست نیست چرا که می‌توان تابع ارزشی معرفی کرد که p_1 در آن درست باشد اما p_2 نباشد. اما جمله دوم به انتفاء مقدم درست است چرا که p_1 همانگو نیست.

حال ادعا می‌کنیم اگر i درست باشد ii حتما درست است. فرض کنیم i درست باشد، سپس به برهان خلف فرض کنیم ii درست نباشد. این یعنی A همانگو است اما B همانگو نیست. یعنی لااقل یک تابع تعبیر وجود دارد که B را نادرست تعبیر می‌کند. این تابع همچنین A را درست تعبیر می‌کند. پس این تابع باعث نقص حکم ذکرشده در i می‌شود. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۷. با توجه به تعاریف، به سادگی می‌توان حکم را ثابت کرد.

۸. فرض کنیم I تابع تعبیری دلخواه باشد. باید نشان دهیم اگر $I \models \{A, \neg A\}$ آنگاه $I \models B$. اما هیچ Iی وجود ندارد که $I \models \{A, \neg A\}$ (چرا که اگر $I \models A$ آنگاه $I \not\models \neg A$.) لذا این جمله همواره به انتفاء مقدم برقرار است.

توضیح. حکم این سؤال به زبان شهودی بیان می‌کند اگر یک گزاره و نقیض آن همزمان درست باشند آنگاه هر گزاره‌ای درست است. به همین دلیل است که با دستگاه‌های ناسازگار می‌توان هر گزاره‌ای را اثبات کرد. ضرب‌المثلِ معروفِ «آب که سر بالا رفت، قورباغه ابوعطا می‌خواند.» مفهوم حکم این سؤال را به زبان فارسی ترسیم می‌کند.

۹. می‌دانیم

$$I_v(A \to B) = ۱ - I_v(A) + I_v(A)I_v(B).$$

هر چهار حالت را بررسی می‌کنیم.

$I_v(A)$	$I_v(B)$	گزاره اول	گزاره دوم
۰	۰	$I_v(A \to B) = ۱$	$I_v(A) \leq I_v(B)$
۰	۱	$I_v(A \to B) = ۱$	$I_v(A) \leq I_v(B)$
۱	۰	$I_v(A \to B) \neq ۱$	$I_v(A) \not\leq I_v(B)$
۱	۱	$I_v(A \to B) = ۱$	$I_v(A) \leq I_v(B)$

لذا حکم به وضوح برقرار است.

۱۰. *برای فرایند حدس زدن به صورت زیر پیش می‌رویم. (مطالب زیر کاملا شهودی است.)*
با کمی تفکر درمی‌یابیم عبارت $A \to \bot$ با عبارت $\neg A$ هم‌ارز است. لذا انتظار می‌رود جانشینی $p_۱$ با $p_۱ \to \bot$ مانند جانشینی آن با $\neg p_۱$ عمل کند و دنبالهٔ A_iها (از نظر معناشناسی) به صورت $p_۱, \neg p_۱, \neg\neg p_۱, \neg\neg\neg p_۱, \ldots$ باشد. حال به سادگی می‌توان مقدار $I_v(A_i)$ و $I_{v'}(A_i)$ را به دست آورد.

برای پاسخ دادن به سؤال به صورت زیر پیش می‌رویم.

ابتدا نیاز داریم ثابت کنیم دنبالهٔ B_iها که در زیر تعریف شده با دنبالهٔ A_iها برابر است.

$$\begin{aligned} B_۰ &= p_۱ \\ B_n &= (B_{n-۱} \to \bot). \end{aligned}$$

این موضوع را با استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. برای صفر و ۱ به وضوح برقرار است. فرض کنیم برای اعداد ۰ تا $n - ۱$ درست است و می‌خواهیم آن را برای n اثبات کنیم.

$$
\begin{aligned}
(\text{تعریف دنبالهٔ } B_i) \quad B_n &= (B_{n-1} \to \bot) \\
\text{فرض استقرا} &= (A_{n-1} \to \bot) \\
\text{تعریف دنبالهٔ } A_i &= (A_{n-2}[p_1/(p_1 \to \bot)] \to \bot) \\
\text{عدم حضور } p_1 \text{ در } \bot \to &= (A_{n-2} \to \bot)[p_1/(p_1 \to \bot)] \\
\text{فرض استقرا} &= (B_{n-2} \to \bot)[p_1/(p_1 \to \bot)] \\
\text{تعریف دنبالهٔ } B_i &= (B_{n-1})[p_1/(p_1 \to \bot)] \\
\text{فرض استقرا} &= (A_{n-1})[p_1/(p_1 \to \bot)] \\
\text{تعریف دنبالهٔ } A_i &= A_n.
\end{aligned}
$$

حال ادعا می‌کنیم I_v و $I_{v'}$ به صورت زیر می‌باشند.

$$
I_v(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{زوج باشد } i \\ 0 & \text{فرد باشد } i \end{cases} \quad ; \qquad I_{v'}(A_i) = 1 - I_v(A_i).
$$

این ادعا را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. در حالت پایه $(n = 0)$ داریم

$$
\begin{aligned}
I_v(A_0) &= I_v(p_1) = v(p_1) = 1. \\
I_{v'}(A_0) &= I_{v'}(p_1) = v'(p_1) = 0.
\end{aligned}
$$

در گام استقرا فرض می‌کنیم حکم برای $n-1$ برقرار است و سعی می‌کنیم آن را برای n ثابت کنیم.

$$
\begin{aligned}
I_v(A_n) &= I_v(B_n) \\
&= I_v(B_{n-1} \to \bot) \\
&= 1 - I_v(B_{n-1}) + I_v(B_{n-1})I_v(\bot) \\
&= 1 - I_v(B_{n-1}) \\
&= 1 - I_v(A_{n-1})
\end{aligned}
$$

اگر n زوج باشد $n-1$ فرد است و بالعکس. لذا در هر دو صورت حکم به سادگی ثابت می‌شود. برای v' نیز به همین ترتیب پیش می‌رویم.

۱۱. ابتدا اتم‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$p_۱ =$ کامیار قاتل است.

$p_۲ =$ مهرداد قاتل است.

$p_۳ =$ کامیار درون ماست سم ریخته.

$p_۴ =$ مهرداد درون ماست سم ریخته.

$p_۵ =$ قتل با چاقو انجام شده.

$p_۶ =$ قاتل چپ‌دست است.

$p_۷ =$ قتل در ساحل رخ داده.

$p_۸ =$ همه‌چیز یک جور دیگر پیش رفته.

حال عبارات ذکرشده در صورت سؤال را به زبان منطق گزاره‌ای برمی‌گردانیم.

$$
\begin{array}{llll}
i) & \neg(p_۱ \wedge p_۲) & ii) & \neg(p_۳ \wedge p_۴) \\
iii) & p_۱ \vee p_۲ & iv) & p_۵ \to p_۶ \\
v) & p_۶ \leftrightarrow p_۱ & vi) & p_۷ \to (p_۳ \to p_۸) \\
vii) & \neg p_۳ \to (p_۵ \wedge \neg p_۶) & viii) & p_۳ \to p_۷ \\
ix) & \neg p_۸ \vee (p_۵ \to \neg p_۸) & x) & p_۵ \vee (p_۶ \to p_۴)
\end{array}
$$

برای فرایند حدس زدن به صورت زیر پیش می‌رویم. (مطالب زیر کاملا شهودی است.)

iv می‌گوید اگر $p_۵$ درست باشد $p_۶$ نیز درست است. اما $p_۵ \wedge \neg p_۶$ می‌گوید با وجود درست بودن $p_۵$، $p_۶$ درست نیست. لذا از آنجا که iv درست است پس تالیِ شرط بیان‌شده در vii نمی‌تواند درست باشد پس الزاما مقدم آن نیز نادرست است. یعنی $p_۳$ درست است. حال با توجه به $viii$ و می‌توان نتیجه گرفت $p_۷$ درست است. همچنین از ii نتیجه گرفت $p_۴$ نادرست است. اکنون به کمک vi نتیجه می‌گیریم $p_۸$ درست است. سپس با توجه به ix درمی‌یابیم که $p_۵$ نادرست است. و از x نتیجه می‌گیریم $p_۶$ نادرست است. لذا با توجه به v مشخص می‌شود $p_۱$ نادرست است. و در نهایت با توجه به iii نتیجه می‌شود $p_۲$ درست است. یعنی **مهرداد قاتل است.**

برای پاسخ دادن به سؤال به صورت زیر پیش می‌رویم.

تابع ارزش v را به صورت زیر تعریف کرده و ادعا می‌کنیم $I_v \models \Gamma$.

$$
v(p_i) = \begin{cases} ۱ & i \in \{۲, ۳, ۷, ۸\} \\ ۰ & \text{else} \end{cases}
$$

برای اثبات ادعا کافیست مقدار I_v را روی هر یک از ۱۰ عبارت داده شده به دست آوریم که این کار به خواننده واگذار شده است.

تدریس‌یارها:

مهرداد ریاحی و کامیار میرزاوزیری