



پرسش‌های مبانی منطق

دکتر مجتهدی

بهار ۹۹

سری: یک

مهلت تحویل: یک‌شنبه، ۲۷ بهمن

۱. فرض کنید A کوچکترین مجموعه‌ای مانند X باشد که دارای ویژگی‌های زیر است.

$$i) \quad (0, 1) \subseteq X$$

$$ii) \quad x \in X \Rightarrow \forall x \in X$$

آ. نشان دهید A وجود دارد.

ب. نشان دهید $A = \mathbb{R}^+$.

۲. برای هر یک از عبارات به سؤالات زیر پاسخ دهید. (نیازی به اثبات نیست.)

آ. آیا عبارت داده شده عضوی از EXP است؟

ب. آیا عبارت داده شده عضوی از $prop$ است؟

$$i) \quad p_1 \equiv p_2$$

$$ii) \quad ((p_1 \vee False) \rightarrow p_2)$$

$$iii) \quad ((p_1 \vee \perp) \rightarrow p_2)$$

$$iv) \quad (p_1 \vee p_2 \vee p_2)$$

$$v) \quad (\neg\neg p_1)$$

$$vi) \quad (\neg(\neg T))$$

$$vii) \quad ((\neg\perp))$$

۳. نشان دهید $prop \notin (p_1 \vee p_2 \rightarrow)$. (توضیح دهید چرا استدلال شما برای $(p_1 \vee p_2)$ کار نمی‌کند.)

۴. نشان دهید $((\neg(T \wedge p_1)) \rightarrow \perp) \in prop$.

۵. تابع $f : prop \rightarrow \mathcal{P}(P)$ به صورت استقرایی در زیر تعریف شده است. (منظور از $\mathcal{P}(P)$ مجموعه

تمام زیرمجموعه‌های مجموعه متغیرهای اتمی است.)

$$i) \quad f(T) = f(\perp) = \emptyset$$

$$ii) \quad f(p_i) = \{p_i\}$$

$$iii) \quad f((A \circ B)) = f(A) \cup f(B) \quad \forall \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$$

$$iv) \quad f((\neg A)) = f(A)$$

توضیح دهید تابع f از نظر مفهومی چه کاری انجام می‌دهد.

۶. نشان دهید $\overline{prop} = prop$.

۷. می‌دانیم با داشتن عبارت A ، درخت ساختمان $T(A)$ به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شود. توابع خواسته شده در زیر را به صورت استقرایی تعریف کنید و مقدار هر یک را روی $A = ((p_1 \wedge p_2) \rightarrow \top)$ به کمک رابطه‌ای که به دست آورده‌اید محاسبه کنید.

آ. تابع $f : prop \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی است که با گرفتن یک عبارت به عنوان ورودی تعداد گره‌های درخت ساختمان آن را به عنوان خروجی می‌دهد.

ب. تابع $g : prop \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ تابعی است که با گرفتن یک عبارت به عنوان ورودی ارتفاع بالاترین گره \rightarrow در درخت ساختمان آن را به عنوان خروجی می‌دهد. (ارتفاع هر گره به معنی فاصله آن گره تا ریشه درخت است.)

توجه. اگر هیچ نماد \rightarrow در عبارت وجود نداشت، ∞ را به عنوان خروجی می‌دهد.

تدریس‌یارها:

مهرداد ریاحی و کامیار میرزاویزی