



تاریخ: ۱۱ اردیبهشت ۱۳۹۷  
مدت امتحان: ۶۰ دقیقه  
مدرس: مجتهدی

## آزمون میان ترم دوم مباحث علوم ریاضی

۱. (آ) (۱۰ نمره) فرض کنید  $R$  و  $S$  دو مجموعه باشند. ثابت کنید  $\text{dom}(R \cup S) = \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S)$ .  
(ب) (۱۰ نمره) حکم بند قبل را طوری تعمیم دهید که برای تعداد دلخواهی از مجموعه‌ها (به جای دو مجموعه) برقرار شود. (نیازی به اثبات حکم تعمیم یافته نیست)
۲. (آ) (۱۰ نمره) فرض کنید  $R$  یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی  $X$  باشد. افزاز حاصل از رابطه‌ی هم‌ارزی  $R$  روی  $X$  (یا همان  $A_R$ ) چیست؟ تعریف آن را بیان کنید.  
(ب) (۱۰ نمره) تابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  را به صورت  $f(n) = n^2$  تعریف می‌کنیم. یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی  $\mathbb{N}$  معرفی کنید که  $f$  با آن سازگار نباشد.
۳. (آ) (۱۰ نمره) فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک‌به‌یک باشد. هم‌چنین فرض کنید  $F: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$  به این صورت باشد که  $F(X) := f[X]$ . نشان دهید  $F$  نیز یک‌به‌یک است.  
(ب) (۱۰ نمره) آیا عکس حکم فوق هم درست است؟ یعنی اگر  $F$  یک‌به‌یک باشد،  $f$  هم یک‌به‌یک است؟ چرا؟
۴. برای اثبات کدام یک از احکام زیر به اصل انتخاب نیاز داریم؟ برای هر کدام، توجیه (نیازی به اثبات نیست) بیاورید.  
(آ) (۵ نمره) برای هر مجموعه مثل  $X$ ، یک رابطه‌ی ترتیب خطی روی  $X$  وجود دارد.  
(ب) (۵ نمره) برای هر مجموعه مثل  $A$  که ناتهی باشد، مجموعه‌ای مثل  $a$  وجود دارد که  $a \in A$ .  
(ج) (۵ نمره) برای هر مجموعه مثل  $X$  یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی  $X$  وجود دارد.  
(د) (۵ نمره) اگر  $f: A \rightarrow B$  پوشا باشد، تابعی مثل  $g: B \rightarrow A$  هست که  $f \circ g = \text{id}_B$ .  
(ه) (۵ نمره) برای هر  $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ، تابعی مثل  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$  هست که  $f(A) \in A$ .

موفق باشید.