



تاریخ: ۱۹ اردیبهشت ۱۳۹۷  
مدت امتحان: ۷۵ دقیقه  
مدرس: مجتهدی

## آزمون میان ترم دوم (مجدد) مبانی ریاضی

۱. (۱۰ نمره) حکم زیر را اثبات کنید یا با مثال نقض رد کنید:

برای مجموعه‌ی دلخواه  $R$ ، اگر  $R^{-1}$  یک تابع باشد،  $R$  یک رابطه است.

۲. فرض کنید  $R$  یک رابطه روی مجموعه‌ی  $A$  باشد، یعنی  $R \subseteq A \times A$ . گوئیم  $R$  شبه‌ترتیب روی  $A$  است اگر: (۱) روی  $A$  بازتابی باشد، (۲) متعدی باشد.

(آ) (۱۰ نمره) فرض کنید  $R$  یک شبه‌ترتیب روی  $A$  باشد. بزرگترین رابطه‌ی  $S$  مشمول در  $R$  را بیابید که ترتیب جزئی روی  $A$  باشد.

(ب) (۱۰ نمره) ثابت کنید رابطه‌ی معرفی شده در بند قبل ترتیب جزئی روی  $A$  است.

۳. فرض کنید  $(X, <)$  و  $(Y, <)$  دو مجموعه‌ی مرتب (جزئی یا کامل) باشند. رابطه‌ی  $\ll$  روی مجموعه‌ی  $X \times Y$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x, y) \ll (x', y') \iff x < x' \ \& \ y < y'$$

(آ) (۱۰ نمره) آیا اگر هر دو  $(X, <)$  و  $(Y, <)$  مرتب جزئی باشند،  $(X \times Y, \ll)$  نیز مرتب جزئی است؟ ادعای خود را با برهان یا مثال نقض ثابت کنید.

(ب) (۱۰ نمره) آیا اگر هر دو  $(X, <)$  و  $(Y, <)$  مرتب خطی باشند،  $(X \times Y, \ll)$  نیز مرتب خطی است؟ ادعای خود را با برهان یا مثال نقض ثابت کنید.

۴. برای اثبات کدام یک از احکام زیر به اصل انتخاب نیاز داریم؟ برای هر کدام، توجیه (نیازی به اثبات نیست) بیاورید.

(آ) (۵ نمره) برای هر مجموعه مثل  $X$ ، یک رابطه‌ی ترتیب خطی روی  $X$  وجود دارد.

(ب) (۵ نمره) برای هر مجموعه مثل  $A$  که ناتهی باشد، مجموعه‌ای مثل  $a$  وجود دارد که  $a \in A$ .

(ج) (۵ نمره) برای هر مجموعه مثل  $X$  یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی  $X$  وجود دارد.

(د) (۵ نمره) اگر  $f: A \rightarrow B$  پوشا باشد، تابعی مثل  $g: B \rightarrow A$  هست که  $f \circ g = \text{id}_B$ .

(ه) (۵ نمره) برای هر  $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ، تابعی مثل  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$  هست که  $f(A) \in A$ .

موفق باشید.