دانشگاه تهران

تمرین سری۵: تابع و رابطه دانشکده آمار، ریاضی و علوم کامپیوتر مهلت تحویل: ۱۳۹۶/۲/۱۶

۱) برای هر رابطه هم‌ارزی $\sim$ روی مجموعه A یک مجموعه B و یک تابع $f : A \longrightarrow B$ وجود دارد که به طوری که $\sim = \{(a,b) | a,b \in A \wedge f(a) = f(b)\}$.

۲) فرض کنید ξ یک مجموعه از رابطه‌های هم‌ارزی روی مجموعه A باشد ابتدا ثابت کنید $\bigcap \xi$ یک رابطه هم‌ارزی است و سپس نشان دهید افراز متناظر با آن برابر است با $\{\bigcap_{R \in \xi} [a]_R | a \in A\}$.

۳) برای هر ۳ مجموعه A و A_1 و A_2 که مرتب خطی هستند ثابت کنید اگر توابع یک به یک f_1 و f_2 با شرایط (*) موجود باشند، آنگاه می‌توان مجموعه مرتب خطی A_3 را با توابع یک به یک g_1 و g_2 با شرایط (**) یافت.

$(*)$
$f_i : A \longrightarrow A_i \qquad \forall x, y (x \leq y \rightarrow f_i(x) \leq f_i(y)) \qquad i = 1, 2.$
$(**)$
$g_i : A_i \longrightarrow A_3 \qquad \forall x, y (x \leq y \rightarrow g_i(x) \leq g_i(y)) \qquad i = 1, 2,$
$\forall x; g_1(f_1(x)) = g_2(f_2(x)).$

۴) فرض کنید X یک مجموعه مرتب جزئی باشد، قراردهید
$P := UP(X) := \bigcup \{S \in P(X) | \forall x, y (x \leq y \wedge x \in S \rightarrow y \in S)\}$ و برای هر A و B که در P باشد، قراردهید:
$A \rightarrow B := \{x \in X | \forall y (x \leq y \wedge y \in A \rightarrow y \in B)\}$ حال ثابت کنید
$A \rightarrow B = R^{-1}(A \setminus B)$ که $R^{-1}(u) = \bigcup_{w \in u} \{v \in X | vRw\}$ و R رابطه‌ی ترتیب روی X است.

۵) فرض کنید Q یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $S = UP(Q)$ باشد و F یک خانواده از زیر مجموعه‌های S باشد که

$i) \forall X, Y \in F; X \cap Y \in F$
$ii) \forall X \in F \forall Y (X \subset Y \rightarrow Y \in F)$
$iii) \forall X \cup Y \in F (X \in F \vee Y \in Y)$
$iv) \emptyset \notin F$

حال مجموعه همه‌ی مجموعه‌های مشابه F (شامل خود F) را T بنامید، $< T, \subset >$ یک مجموعه مرتب جزئی است. نشان دهید که یک تابع مثل f با شرایط زیر وجود دارد:

$i) f : S \longrightarrow UP(T) \; (1-1)$
$ii) \forall x, y; f(x \cup y) = f(x) \cup f(y) \wedge f(x \cap y) = f(x) \cap f(y) \wedge f(x \rightarrow y) = f(x) \rightarrow f(y)$
$iii) \forall x, y; (x \subset y \rightarrow f(x) \subset f(y)$