بسمه تعالی

آزمون میان‌ترم دوم مبانی علوم ریاضی

تاریخ: ۲۴ آبان ۱۳۹۶
مدت امتحان: ۹۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

نام: .... نام خانوادگی: .... شماره دانشجویی: ....

۱. (آ) (۵نمره) صورت ضعیف از اصل اجتماع را بنویسید. (بیان ریاضی)

جواب. صورت ضعیف اصل اجتماع بیان می‌کند که اجتماع هر دو مجموعه (مثل X و Y) وجود دارد (مجموعه‌ی Z در پایین):

$$\forall X, Y \exists Z \forall x [x \in Z \leftrightarrow (x \in X \vee x \in Y)]$$

(ب) (۵نمره) صورت قوی از اصل استقرا را بنویسید. (بیان ریاضی)

جواب. صورت قوی از اصل اجتماع بیان می‌کند که اجتماع یک خانواده (مثل X) از مجموعه‌ها وجود دارد (که همان مجموعه‌ی Y در پایین است):

$$\forall X \exists Y \forall y [y \in Y \leftrightarrow \exists x (y \in x \wedge x \in X)]$$

(ج) (۵نمره) نشان دهید دو صورت ضعیف و قوی از اصل اجتماع معادلند.

جواب. حالا نشان می‌دهیم صورت قوی‌تر، صورت ضعیف‌تر را نتیجه می‌دهد. فرض کنید مجموعه‌های X و Y داده شده باشد. طبق اصل جفت‌سازی، مجموعه‌ی $\{X, Y\}$ وجود دارد. حالا طبق صورتِ قوی از اصل اجتماع، اجتماع خانواده‌ی $\{X, Y\}$ که همان اجتماع دو مجموعه‌ی X و Y است وجود دارد.

۲. فرض کنید که f یک تابع باشد.

(آ) (۱۵نمره) آیا ممکن است که f هم‌چنین یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی دامنه‌اش باشد؟ اگر جواب منفی است برهان بیاورید و اگر جواب مثبت است بگویید در این صورت در مورد f چه می‌توان گفت (با ذکر دلیل).

جواب. بله چنین تابعی ممکن است وجود داشته باشد. در این صورت تابع f باید تابع همانی روی دامنه‌اش باشد، یعنی برای هر $x \in \mathsf{dmn}(f)$ داریم $f(x) = x$. برای اثبات این موضوع دو چیز را باید ثابت کنیم: (۱) این‌که هر تابع همانی روی هر مجموعه‌ای، یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی دامنه‌اش است، (۲) اگر f یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی دامنه‌اش باشد، در این‌صورت f یک تابع همانی است.

اثبات ۱. فرض کنید f یک تابع همانی روی مجموعه‌ی X باشد. بنابراین $f = \{(x,x) : x \in X\}$. بنابراین به وضوح f یک رابطه‌ی بازتابی، متقارن و متعدی (هم‌ارزی) روی X است.

اثبات ۲. فرض کنید f یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی دامنه‌اش باشد. بنابراین برای هر $x \in \mathsf{dmn}(f)$ با توجّه به بازتابی بودن f داریم $(x,x) \in f$ و بنابراین $f(x) = x$. و این یعنی این‌که f تابع همانی است.

(ب) (۱۵نمره) آیا ممکن است که f هم‌چنین یک رابطه‌ی ترتیب خطی روی میدانش باشد؟ اگر جواب منفی است برهان بیاورید و اگر جواب مثبت است بگویید در این صورت در مورد f چه می‌توان گفت (با ذکر دلیل).

جواب. بله ممکن است. در این‌صورت تابع f فقط می‌تواند به فرم‌های زیر باشد:

$$f = \{\} \quad \text{یا} \quad f = \{(a,b)\} \quad \text{که در آن} \quad a \neq b$$

به عبارت دیگر دامنه‌ی تابعِ f حداکثر می‌تواند یک عضو مثل a داشته باشد که در این صورت هم باید داشته باشیم $f(a) \neq a$. برای اثبات این موضوع اوّلاً باید توجه کنیم که هر تابع مثل f با دامنه‌ی حداکثر یک‌عضوی مثل a که در آن حتماً $f(a) \neq a$ روی میدانش یک ترتیب خطی است: یعنی دارای خواص، ضدبازتابی، تعدی و تثلیث است.

حالا فرض کنید f تابعی باشد که روی میدانش یک ترتیب خطی هم باشد. در این‌صورت، اگر a, b دو عضو

مختلف در دامنه‌ی f باشند، از آن‌جا که f یک ترتیب خطی‌است، پس a و b باید تحت f با هم قابل مقایسه باشند یعنی باید داشته باشیم $f(a) = b$ یا $f(b) = a$. مثلاً فرض کنید $f(a) = b$. از آن‌جایی که b در دامنه‌ی f بود، پس c موجود است که $f(a) = c$. بنابراین باتوجّه به این‌که f متعدی است (به‌عنوان یک رابطه‌ی ترتیبِ خطی) بنابراین باید داشته باشیم $f(a) = c$ و باتوجّه به تابع بودنِ f داریم $c = b$. این نتیجه می‌دهد که $f(b) = b$ و این با ضدّبازتابی بودن f (به‌عنوان یک ترتیب خطی) پس دامنه‌ی f حدّاکثر یک عضو دارد (مثل a) و طبق ضدبازتابی بودن f داریم $f(a) \neq a$.

۳. از احکام زیر کدام درست است؟ کدام درست نیست؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(آ) (۱۰ نمره) اگر $f : A \longrightarrow B$ یک تابع پوشا باشد، آن‌گاه تابع $g : B \longrightarrow A$ موجود است طوری‌که برای هر $x \in A$ داریم $g(f(x)) = x$.

جواب. این حکم غلط است. به‌عنوان مثال تابعِ $f : A \longrightarrow B$ را درنظر بگیرید که در آن $f := \{(a, b), (a', b)\}$، $A = \{a, a'\}$، $B := \{b\}$ و a, a', b سه مجموعه‌ی متمایز هستند. در این‌صورت اگر تابع $g : B \longrightarrow A$ موجود باشد طوری‌که $g \circ f$ همانی شود، باید داشته باشیم: $a = g(f(a)) = g(b) = g(f(a')) = a'$ که تناقض است.

(ب) (۱۰ نمره) اگر $f : A \longrightarrow B$ یک تابع پوشا باشد آن‌گاه برای هر مجموعه‌ی C و هر $f_1, f_2 : B \longrightarrow C$ که داشته باشیم $f_1 \circ f = f_2 \circ f$، داریم $f_1 = f_2$.

جواب. این حکم درست است. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ تابعی پوشا باشد و $f_1, f_2 : B \longrightarrow C$ دو تابع باشند طوری‌که $f_1 \circ f = f_2 \circ f$. نشان می‌دهیم $f_1 = f_2$. برای این‌کار کافیست نشان دهیم برای هر $b \in B$ داریم $f_1(b) = f_2(b)$. فرض کنید $b \in B$. در این‌صورت با توجّه به پوشا بودنِ f، $a \in A$ موجود است طوری‌که $f(a) = b$. حالا با توجّه به این‌که $f_1 \circ f = f_2 \circ f$، نتیجه می‌گیریم:

$$f_1(b) = f_1(f(a)) = f_2(f(a)) = f_2(b)$$

(ج) (۱۰ نمره) برای هر تابعِ f داریم $f[\![f^{-1}[\![A]\!]]\!] = A$.

جواب. این حکم هم غلط است. کافیست A را به‌گونه‌ای در نظر بگیریم که $A \neq \emptyset$ و $A \cap \mathsf{rng}(f) = \emptyset$.

موفق باشید.