بسمه تعالی

تاریخ: ۲۰ آذر ۱۳۹۶
مدت امتحان: ۶۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

آزمون میان‌ترم سوم مبانی علوم ریاضی

نام: .... نام خانوادگی: .... شماره دانشجویی: ....

---

۱. (۳۰نمره) (آ) تعریف مجموعه‌ی اعداد طبیعی را بنویسید و ثابت کنید این مجموعه وجود دادرد.

جواب. مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به‌صورت اشتراک همه‌ی مجموعه‌های استقرایی تعریف می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\text{S استقرایی ست}} S$$

برای اثبات وجود چنین مجموعه‌ای از اصل زیرمجموعه (comprehension) و اصل بی‌نهایت استفاده می‌کنیم. در ابتدا توجه کنید که اصل بی‌نهایت نتیجه می‌دهد که یک مجموعه‌ی استقرایی مثل S_0 وجود دارد. سپس از اصل زیرمجموعه استفاده می‌کنیم و وجود مجموعه‌ی زیر را تضمین می‌کنیم:

$$\{x \in S_0 : \forall S \left[(0 \in S \wedge (\forall y(y \in S \to y^+ \in S))) \to x \in S\right]\}$$

حالا واضح است که مجموعه‌ی بالا همان اشتراک همه‌ی مجموعه‌های استقرایی است.

(ب) قضیه‌ی استقرا را بیان و اثبات کنید.

جواب. فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول باشد طوری‌که:

- $\varphi(0)$ درست باشد.
- برای هر $n \in \mathbb{N}$ اگر $\varphi(n)$ آن‌گاه $\varphi(n^+)$.

در این‌صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\varphi(n)$.

اثبات قضیّه‌ی استقرا: مجموعه‌ی S را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$S := \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$$

از تعریف S واضح است که $S \subseteq \mathbb{N}$. توجّه داریم که با توجّه به تعریف $\mathbb{N}$، می‌دانیم که هر مجموعه‌ی استقرایی شامل $\mathbb{N}$ است. پس کافیست نشان دهیم S استقرایی است. اما طبق دو بند بالا در فرض قضیه، طبق تعریف استقرایی بودن یک مجموعه، نتیجه می‌گیریم که S استقرایی است و بنابراین $\mathbb{N} \subseteq S$. بنابراین $S = \mathbb{N}$.

(ج) قضیه‌ی تقسیم را ثابت کنید، یعنی برای هر دو عدد طبیعی داده شده مثل m, n که $n \neq 0$ ثابت کنید اعداد طبیعیِ p و r موجودند طوری‌که $m = np + r$ و $r < n$. به r باقیمانده و به p خارج قسمت تقسیم m بر n گویند.

جواب. خاصیّت $\varphi(m)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

«برای هر عدد طبیعی مثبت مثل n، اعداد طبیعی مثل p و r موجودند طوری‌که $m = np + r$ و $r < n$.»

با استقرا روی $\varphi(m)$ حکم، نشان می‌دهیم هر عدد طبیعی دارای خاصیّت φ است و به‌این ترتیب حکم مورد نظر ثابت می‌شود.

- $\varphi(0)$: باید نشان دهیم برای هر $n > 0$ اعدادی مثل p, r موجودند طوری‌که $0 = n.p + r$ و $r < n$. با انتخاب $r = p = 0$ درستی این حکم تایید می‌شود.
- فرض کنید $\varphi(m)$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم $\varphi(m+1)$ نیز برقرار است. با استفاده از فرض استقرا یعنی $\varphi(m)$، برای $n > 0$ دل‌خواه اعداد طبیعی r, p موجودند طوری‌که $m = n.p + r$ و $r < n$. بنابراین داریم $m + 1 = n.p + (r + 1)$. از فرض $r < n$ نتیجه می‌گیریم که $r + 1 \leq n$ و بنابراین دو حالت داریم: $r + 1 < n$ یا $r + 1 = n$. اگر $r + 1 = n$ برقرار باشد که $\varphi(m+1)$ به‌دست می‌آید. اگر هم $r + 1 = n$، در این‌صورت داریم: $m + 1 = n.p + (r + 1) = n.(p + 1) + 0$، که باز هم حکم مورد نظر $\varphi(m+1)$ به‌دست می‌آید.

۲. (۱۰ نمره) آیا مجموعه‌ی $(1, 0)$ متعدّی است؟ در صورتی که جواب مثبت است درستی ادعای خود را نشان دهید و در غیر این‌صورت مجموعه‌ای شامل آن بیابید که متعدی باشد.

جواب. ابتدا توجّه داریم که $(1, 0) = \{\{1\}, \{1, 0\}\}$ که در آن $1 = \{0\}$ و $\emptyset = 0$. از آن‌جا که $0 \in \{0, 1\} \in (1, 0)$ و $0 \notin (1, 0)$ نتیجه می‌گیریم که $(1, 0)$ متعدی نیست. حالا کوچکترین مجموعه‌ای را شامل $(1, 0)$ می‌یابیم که متعدی باشد. از آن‌جایی که یک مجموعه مثل X متعدی است اگر و فقط اگر $X \supseteq \bigcup X$، بنابراین $\bigcup(1, 0)$ را به $(1, 0)$ اضافه می‌کنیم تا به مجموعه‌ی $\{1, 0, \{1, 0\}, \{1\}\}$ برسیم. کمی توجّه به مجموعه‌ی حاصل نشان می‌دهد که این مجموعه متعدی است و این حکم مورد نظر را به دست می‌دهد.

موفق باشید.