



تاریخ: ۲۹ مهر ۱۳۹۶
مدت امتحان: ۳۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

آزمون میان ترم مبانی علوم ریاضی

۱. (۲۵ نمره) کدام یک معتبر (همیشه درست) هستند؟ به کمک جدول ارزش، ادعای خود را در مورد یکی از آن‌ها که غیر معتبر است ثابت کنید و هم‌چنین به کمک جبر گزاره‌ای ادعای خود را در مورد یکی از آن‌ها که معتبر هستند اثبات کنید.

$$(A) \quad (\forall x \exists y (A(x) \vee B(y)) \leftrightarrow \exists y \forall x (A(x) \vee B(y))) \quad (5 \text{ نمره})$$

جواب. این جمله معتبر است.

$$(B) \quad ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r) \quad (10 \text{ نمره})$$

جواب. این جمله نامعتبر است. جدول ارزش زیر را برای آن داریم:

| p | q | r | $p \leftrightarrow q$ | $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ | $p \leftrightarrow r$ | $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \rightarrow [p \leftrightarrow r]$ |
|-----|-----|-----|-----------------------|---|-----------------------|---|
| F | F | F | T | F | T | T |
| F | F | T | T | T | F | F |
| F | T | F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | F | F | T |
| T | F | F | F | T | F | F |
| T | F | T | F | F | T | T |
| T | T | F | T | F | F | T |
| T | T | T | T | T | T | T |

$$(C) \quad ((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \quad (10 \text{ نمره})$$

جواب. این جمله معتبر است. با استفاده از جبر گزاره‌ای این حکم را ثابت می‌کنیم:

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv \neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

۲. از بین روابط زیر کدام یک برقرار است؟ ادعای خود را در مورد یکی از آن‌ها که برقرارند ثابت کنید.

$$(A) \quad (5 \text{ نمره}) \quad A \Delta (B - C) \subseteq (A \Delta B) - (A \Delta C)$$

جواب. این رابطه برقرار نیست. مثال نقضی که می‌توان برای آن نوشت:

$$A := \{1, 4, 5, 7\} \quad B := \{2, 5, 6, 7\} \quad C := \{3, 4, 6, 7\}$$

(ب) (۱۰نمره) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

جواب. این رابطه برقرار است. فرض کنید $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. پس طبق تعریف اجتماع داریم $X \in \mathcal{P}(A)$ یا $X \in \mathcal{P}(B)$. پس طبق تعریف مجموعه‌ی توانی داریم $X \subseteq A$ یا $X \subseteq B$ و در نتیجه $X \subseteq A \cup B$. حالا دوباره طبق تعریف مجموعه‌ی توانی، داریم $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. حالا با توجه به این‌که برای X دلخواه نشان دادیم $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ نتیجه می‌دهد $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ ، طبق تعریف «زیرمجموعه بودن» می‌توان نتیجه گرفت $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(ج) (۵نمره) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

جواب. این رابطه برقرار نیست. مثال نقض برای آن:

$$A := \{1\} \quad B := \{2\}$$

موفق باشید.