

به نام خدا



مدرس: دکتر مجتبی مجتهدی

زمان تحویل: شنبه 25 آذر

دانشکده آمار، ریاضی و علوم کامپیوتر

سری هشتم از تمرین‌های تحویلی مبانی ریاضیات

1. برای گزاره‌های زیر اثبات دقیق ارائه دهید. اگر $x, y, z \in \mathbb{Q}$

- 1.1. آنگاه $x + y = y + x$
- 1.2. آنگاه $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 1.3. آنگاه $x + 0 = x$
- 1.4. آنگاه $x \cdot 0 = 0$
- 1.5. آنگاه $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- 1.6. آنگاه $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- 1.7. اگر $<$, ترتیب تعریف شده در \mathbb{Q} باشد آنگاه $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
- 1.8. اگر $<$, ترتیب تعریف شده در \mathbb{Q} باشد آنگاه $x < y \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$

2. نشان دهید اگر $x, y \in \mathbb{Z}$ آنگاه: $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

3. نشان دهید اگر $x \in \mathbb{Q}$ آنگاه: $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

4. نشان دهید اگر $x, y \in \mathbb{Q}$ و $<$, ترتیب تعریف شده در \mathbb{Q} باشد آنگاه:

$$x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} (x < z < y)$$

5. نشان دهید اگر E یک تابع یک به یک از \mathbb{Z} به \mathbb{Q} باشد. به صورتی که:

$$E: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \quad 1_z := [(1, 0)]$$

$$E(a) := [(a, 1_z)]$$

دارای خواص زیر است. (اعمال و رابطه سمت راست در \mathbb{Q} و سمت چپ در \mathbb{Z} است)

$$E(a + b) = E(a) + E(b) \quad 5.1$$

$$E(a \cdot b) = E(a) \cdot E(b) \quad 5.2$$

$$a < b \Leftrightarrow E(a) < E(b) \quad 5.3$$

6. آیا تابعی مانند $f: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق کند؟

$$f([(n, m)]) = [(m, n)]$$