به نام خدا

مدرس: دکتر مجتبی مجتهدی

دانشکده ی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

آخرین مهلت تحویل: شنبه ۲۰ آبان

سری چهارم از سوالات تحویلی مبانی ریاضیات

.۱

الف) برای مجموعه های دلخواه b و a تعریف می کنیم:

$$\ll a, b \gg = \{\{a\}, b\}$$

مجموعه های d و c و b و a را بیابید به طوری که $\ll a, b \gg = \ll c, d \gg$ ولی $a \neq c$ و $b \neq d$.

ب) برای مجموعه های دلخواه b و a فرض کنید :

$$\ll a, b \gg = \{\{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}\}$$

ثابت کنید اگر $\ll a, b \gg = \ll c, d \gg$، آنگاه $a = c$ و $b = d$.

۲. اگر R یک رابطه و A, B مجموعه های دلخواهی باشند، ثابت کنید:

الف) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$

ب) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$ (مثال نقض برای برابری؟ تساوی در چه حالتی برقرار می شود؟)

پ) $R[A] \setminus R[B] \subseteq R[A \setminus B]$ (مثال نقض برای برابری؟ تساوی در چه حالتی برقرار می شود؟)

.۳

الف) مثالی از یک رابطه R ارائه دهید به طوری که $R = R^{-1}$.

ب) برای هر رابطه R نشان دهید: $rng(R^{-1}) = dmn(R)$ و $rng(R) = dmn(R^{-1})$.

پ) برای هر رابطه R نشان دهید: $R \subseteq dmn(R) \times rng(R)$ (مثال نقض برای برابری؟ تساوی در چه حالتی برقرار می شود؟)

۴. برای مجموعه های A, B, C نشان دهید:

الف) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

ب) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

پ) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

ت) $(A \times B)^{-1} = B \times A$

۵. رابطه ی R دارای خواص تقارنی و تعدی است. ثابت کنید R دارای خاصیت بازتابی روی $dmn(R)$ است.

۶. E مجموعه ای ناتهی از رابطه های هم ارزی روی مجموعه ی A است. ثابت کنید $\cap A$ نیز رابطه ای هم ارزی روی A است.

۷. ثابت کنید اگر S و R رابطه های هم ارزی روی A باشند، آنگاه $R \subseteq S$ اگر و تنها اگر هر عضو $A \backslash R$ زیرمجموعه ای از یکی از اعضای $A \backslash S$ باشد.

۸. فرض کنید $(B,<)$ و $(A,<)$ ترتیب های جزیی باشند. تعریف می کنیم:

$$(a,b) \ll (c,d) \Leftrightarrow a,c \in A \text{ و } b,d \in B \text{ ،} a < c \text{ ،} b < d$$

نشان دهید $(A \times B, \ll)$ یک ترتیب جزیی است.

۹. فر ض کنید $(B,<)$ و $(A,<)$ ترتیب های جزیی باشند. تعریف می کنیم:

$$(a,b) \ll (c,d) \Leftrightarrow \big([(a=c) \wedge (b<d)] \vee (a<c)\big) \text{ و } b,d \in B \text{ و } a,c \in A$$

نشان دهید $(A \times B, \ll)$ یک ترتیب جزیی است (نام این ترتیب دیکشنری است).

۱۰. با توجه به تعریف ارائه شده از رابطه $(\ll)$ در سوال قبل، نشان دهید $(A \times B, \ll)$ یک ترتیب خطی است اگر هر دوی $(B,<)$ و $(A,<)$ ترتیب خطی باشند. همچنین نشان دهید که $(A \times B, \ll)$ یک خوش ترتیبی است اگر هر دوی $(B,<)$ و $(A,<)$ خوش ترتیبی باشند.