تمارین پیشنهادی سری سوم مبانی ریاضیات:

۱- الف) ثابت کنید «مجموعه همه مجموعه‌ها» وجود ندارد.

ب) ثابت کنید برای هر مجموعه A، وجود دارد xای که $x \notin A$

۲- برای هر X نشان دهید $P(X) \subseteq X$ نادرست است. به ویژه برای هر X، $P(X) \neq X$.

۳- ثابت کنید مجموعه شامل همه مجموعه‌های تک عضوی وجود ندارد.

۴- الف) برای هر مجموعه A ثابت کنید: $\bigcup P(A) = A$

ب) ثابت کنید $A \subseteq P(\bigcup A)$. تساوی در چه شرایطی برقرار می‌شود؟

۵- فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند. همه مجموعه‌های مختلفی که از این سه مجموعه با اعمال دوتایی $\cup$، $\cap$ و $\setminus$ ساخته می‌شوند را بیابید.

۶- فرض کنید $S = \{\{a\}, \{a,b\}\}$، عبارت $\bigcup(\bigcup S - \bigcap S)$ را مشخص کنید وقتی:

الف) $a \neq b$ ب) $a = b$

۷- فرض کنید A یک مجموعه باشد. ثابت کنید «متمم» برای A وجود ندارد.
(«متمم A» عبارت است از مجموعه همه xهایی که $x \notin A$)

۸- ثابت کنید برای هر $S \neq \emptyset$، $\bigcap S$ وجود دارد. در کجای برهان فرض $S \neq \emptyset$ به کار می‌رود؟

۹- فرض کنید $S \neq \emptyset$ و A مجموعه باشد.

الف) قرار دهید $T_1 = \{Y \in P(A) : X \in S \text{ برای یک } Y = A \cap X\}$ و ثابت کنید:
$A \cap \bigcup S = \bigcup T_1$ (تعمیم قانون توزیع پذیری)

ب) قرار دهید $T_2 = \{Y \in P(A) : X \in S \text{ برای یک } Y = A \setminus X\}$ و ثابت کنید
$A \setminus \bigcup S = \bigcup T_2$

پاسخ تمارین سری سوم

(الف)

(1) فرض خلف، مجموعه همه مجموعه‌ها وجود دارد.

$U :=$ مجموعه همه مجموعه‌ها

$A = \{x \in U : x \neq x\}$، طبق اصل زیرمجموعه A را می‌توانیم تعریف کنیم $\leftarrow$ اما از پارادکس راسل می‌دانیم A وجود ندارد $\leftarrow$ فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود

※

(ب)

حکم: $\forall_A \; \exists_x (x \notin A)$

فرض خلف: فرض کنید نقیض گزاره بالا درست باشد.

$\neg \forall_A (\exists_x (x \notin A)) \to \exists A \, \forall_x (x \in A)$ ؛ این تعریف مجموعه همه مجموعه‌ها است که می‌دانیم وجود ندارد ※

پس حکم سوال درست است

(2) می‌دانیم: $\forall_x (x \notin x)$ (نتیجه اصل تنظیم) (I)

(الف) فرض خلف: $\exists_x P(x) \subseteq x$ (حکم سوال: $\forall_x P(x) \not\subseteq x$)

$$\left.\begin{array}{l} \exists_x P(x) \subseteq x \\ \forall_x \, x \in P(x) \end{array}\right\} \underset{I}{x \in x} \Big\} ※$$

پس فرض خلف اشتباه و حکم سوال درست است.

(ب) حکم: $\forall_x P(x) \neq x$

فرض خلف: $\exists_x P(x) = x$

$\exists_x P(x) = x \to \exists_x P(x) \subseteq x$ ※ پس حکم درست است

(با توجه به قسمت اول سوال)

وجود ندارد

③ حکم سوال: مجموعه همه مجموعه‌های تک عضوی وجود ندارد: $\nexists A\,(\forall_x\ x:\text{تک عضوی}\ (x\in A))$

فرض خلف: " " " " دارد: $\exists A\,(\forall_x\ x\ \text{تک عضوی}\ (x\in A))$

مجموعه همه مجموعه‌های تک عضوی

اما: اگر U مجموعه همه مجموعه‌ها باشد، آن‌گاه: $U=\cup A$

$U=\cup A \rightarrow \begin{cases} U\subseteq \cup A & ⓐ \\ \cup A\subseteq U & \text{واضح است} \end{cases}$ * اگر این ادعا اثبات شود نتیجه می‌شود $\cup A$ مجموعه همه مجموعه‌ها است ولی می‌دانیم مجموعه همه مجموعه‌ها وجود ندارد.

اثبات ⓐ:

$\forall_x\,(x\in U\rightarrow \{x\}\subset A\rightarrow x\in \cup A)$

④ الف) ثابت کنید:

$\cup P(A)=A \xrightarrow[\text{کنیم}]{\text{باید اثبات}} \begin{cases} \cup P(A)\subseteq A & \text{I} \\ A\subseteq \cup P(A) & \text{II} \end{cases}$

I
$\forall_x\,(x\in \cup P(A)\rightarrow \exists_{y\in P(A)}\ x\in y \xrightarrow{y\subset A} x\in A)$

II
$\forall_x\,(x\in A \xrightarrow{A\in P(A)} \exists_{y\in P(x)}\ x\in y\rightarrow x\in \cup P(A))$

$\Big\}\ \cup P(A)=A$

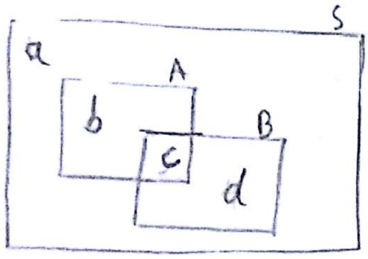
ب) ثابت کنید: $A\subseteq P(\cup A)$

$\forall_x\,(x\in A\rightarrow \forall_{y\in x}\ y\in \cup A\rightarrow x\subseteq \cup A\rightarrow x\in P(\cup A))$

(این فلش دوطرفه نیست)

حالت تساوی:

امتیازی!



(5) با این سه عمل تمام حالاتی را که این چهار ناحیه در آن حضور داشته باشند یا نباشند می توان ساخت:
(عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ در مبنای دو بیان گر حالتی است که هر کدام از ناحیه های a، b، c، d وجود دارند یا نه، اگر وجود داشتند مقدار متناظر a، b، c، d یک است اگر وجود نداشتند صفر است)

$0000 = \emptyset = A \setminus A$
$0001 = B \setminus A$
$0010 = A \cap B$
$0011 = B \cap S$
$0100 = A \setminus B$
$0101 = A \Delta B$
$0110 = A \cap S$
$0111 = A \cup B$
$1000 = S \setminus (A \cup B)$
$1001 = S \setminus A$
$1010 = S \setminus (A \Delta B)$
$1011 = S \setminus (A \setminus B) = S \cup B$
$1100 = S \setminus B$
$1101 = S \setminus (A \cap B)$
$1110 = S \setminus (B \setminus A) = S \cup A$
$1111 = S \cup B \cup A$

(6)

$S = \{\{a\},\{a,b\}\}$

$\bigcup S = \{a,b\}\ ;\ \bigcap S = \{a\}$

الف) $\bigcup(\bigcup S \setminus \bigcap S) = \bigcup(\{b\}) = b$

ب) $\bigcup S = \{a,b\} \rightarrow \{a\} \rightarrow \bigcup(\bigcup S \setminus \bigcap S) = \bigcup \emptyset = \emptyset$

(7) ثابت کنید

$\forall A (\exists! B (\forall x\ x \notin A \rightarrow x \in B)$

برهان خلف

$\exists A (\exists B (\forall x\ x \notin A \rightarrow x \in B)$

ازجا.

$A \cup B = U \rightarrow$ مجموعه همه مجموعه‌ها

$A \cup B \subseteq U$ واضح

$U \subseteq A \cup B$ (I)

پس این تناقض است، چون U وجود ندارد

(I)

$\forall x (x \in U \rightarrow x \in A \vee x \notin A \begin{cases} x \in A \\ x \notin A \rightarrow x \in B \end{cases} \rightarrow x \in A \cup B)$

Scanned by CamScanner

در این جا از فرض $S\neq\emptyset$ استفاده شد

(8) (وجود)

$$S\neq\emptyset \to \forall_{x_0}\ x_0\in S \xrightarrow[\text{Comprehension}]{\text{طبق اصل}} A=\{x\in x_0: \forall_{y\in S}(x\in y)\}=\bigcap S$$

(اصل وجود زیرمجموعه)

یکتایی: فرض کنید $x_1\in S$ وجود داشته باشد به صورتی که $x_1\neq x_0$، اثبات می کنیم اگر $A'=\{x\in x_1: \forall_{y\in S}(x\in y)\}$ آن گاه $A=A'$

$$\left.\begin{array}{l}\forall_x\left(x\in A\to x\in x_0\wedge\forall_{y\in S}(x\in y)\xrightarrow{x_1\in S} x\in x_1\wedge\forall_{y\in S}(x\in y)\to x\in A'\right)\\ \forall_x\left(x\in A'\to x\in x_1\wedge\forall_{y\in S}(x\in y)\xrightarrow{x_0\in S} x\in x_0\wedge\forall_{y\in S}(x\in y)\to x\in A\right)\end{array}\right\} A=A'$$

(9) $S\neq\emptyset, A$

$T_1=\{Y\in P(A): x\in S$ به ازای $Y=A\cap x\}$

(الف) اثبات کنید: $A\cap\bigcup S=\bigcup T_1$

$$\forall_x\Big(x\in A\cap\bigcup S\to (x\in A)\wedge(x\in\bigcup S)\to(x\in A)\wedge\exists_{y\in S}\ x\in y)\to\dots$$
$$\dots\to\exists_{y\in S}(x\in A\wedge x\in y)\to\exists_{y\in S}(x\in A\cap y)\to y\in\bigcup T_1\Big)\to \underline{A\cap\bigcup S\subseteq\bigcup T_1}\ \text{(I)}$$

$$\forall_x\Big(x\in\bigcup T_1\to\exists_{y\in T_1}(x\in y)\to\exists_{y_2\in S}(x\in y_2\cap A)\to\exists_{y_2\in S}(x\in y_2\wedge x\in A)\to\dots$$
$$\dots\to x\in A\wedge\exists_{y_2\in S}(x\in y_2)\to x\in A\cap\bigcup S\Big)\to\underline{\bigcup T_1\subseteq A\cap\bigcup S}\ \text{(II)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{(I)}\\ \text{(II)}\end{array}\right\}\ \underline{A\cap\bigcup S=\bigcup T_1}$$

(ب)

$T_2=\{Y\in P(A): x\in S$ به ازای یک $Y=A\setminus x\}$

اثبات کنید $A\setminus\bigcup S=\bigcup T_2$

$$\forall_x\Big(x\in A\setminus\bigcup S\leftrightarrow x\in A\wedge x\notin\bigcup S\leftrightarrow x\in A\wedge\forall_{y\in S}(x\notin y)\leftrightarrow\forall_{y\in S}(x\in A\wedge x\notin y)\leftrightarrow\dots$$
$$\dots\leftrightarrow\forall_{y\in S}(x\in A\setminus y)\leftrightarrow x\in\bigcap T_2\leftrightarrow x\in\bigcup T_2\Big)\to A\setminus\bigcup S=\bigcup T_2\quad(A\setminus\bigcup S=\bigcap T_2)$$

9- ب- قسمت دوم

ثابت کنید

$$A \setminus \bigcap S = \bigcup T_2$$

$$\forall_x \left(x \in A \setminus \bigcap S \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \bigcap S \leftrightarrow x \in A \wedge \exists_{y \in S}\, x \notin y \leftrightarrow \dots \right.$$

$$\left. \dots \leftrightarrow \exists_{y \in S} (x \in A \wedge x \notin y) \leftrightarrow x \in \bigcup T_2 \right) \to A \setminus \bigcap S = \bigcup T_2$$