۱۳۹۶/۷/۱۴:

تمارین پیشنهادی سری دوم مبانی ریاضیات:

۱- گزاره های زیر را در صورت درستی اثبات و در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.

الف) $(\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)) \to \forall x\,(A(x)\vee B(x))$

ب) $\forall x\,(A(x) \vee B(x)) \to (\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x))$

پ) $\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \to (\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x))$

ت) $(\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)) \to \exists x\,(A(x) \wedge B(x))$

ث) $\forall x\,(A(x) \leftrightarrow B(x)) \leftrightarrow (\forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x))$

ج) $\forall x\,(A(x) \leftrightarrow B(x)) \to (\forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x))$

۲- نشان دهید اگر $A=B$، آنگاه $A \Delta B = \emptyset$.

۳- فرض کنید $A, B, V$ مجموعه اند به طوری که $A\cup B\subseteq V$ برای هر $X \subseteq V$ تعریف می کنیم: $X' = V \setminus X$. ثابت کنید:

الف) $((A'\cup B)'\cup B)'\cup(A\cup B')'\cup A = V$

ب) اگر $C, D \subseteq V$، آنگاه:

$$(((B'\cup C)'\cup A'\cup C)\cap D')\cup(A\cap B')\cup D = V$$

۴- برای مجموعه های $A, B, C$ نشان دهید گزاره های زیر معادل اند،

(i) $C\subseteq A$

(ii) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cup C)$

۵- ثابت کنید مجموعه های $A, B, C$ وجود ندارند که $A\cap B\neq\emptyset$، $A\cap C=\emptyset$، $(A\cap B)\setminus C=\emptyset$

۶- زیرمجموعه $\mathcal{F}$ از $P(A)$ $(\mathcal{F} \subseteq P(A))$ را یک خانواده اسپرنر گوییم هرگاه $\forall A,B \in \mathcal{F}\quad A \subseteq B \Rightarrow A = B$. کل خانواده اسپرنرها با عنوان مجموعه $\{1,2,3,4\}$ را پیدا کنید.

۷- فرض کنید $A$ ، $B$ و $C$ مجموعه‌هایی باشند به طوری که $A \subseteq B \subseteq C$. مجموعه‌ای مانند $D$ بیابید که $B \cap D = A$ و $B \cup D = C$

۸-

الف) برای مجموعه‌های دلخواه $A$ ، $B$ ، $C$ ثابت کنید $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

ب) فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه‌های دلخواهی باشند. ثابت کنید مجموعه $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ شامل اعضایی است که دقیقاً در تعداد فردی از $A_i$ ها آمده‌اند.

۹- هر یک از گزاره‌های زیر را بدون استفاده از عضوگیری (تنها با استفاده از جبر مجموعه‌ها) ثابت کنید!

الف) اگر $A \cap B = A \cap C$ ، $A \cup B = A \cup C$ ، آنگاه $B = C$

ب) $A \Delta B = A \Rightarrow B = \emptyset$

پ) $A \Delta B = \emptyset \Rightarrow B = A$

ت) $A \Delta B = C \Delta D$ اگر و تنها اگر $A \Delta C = B \Delta D$

۱۰- کدام یک از روابط مجموعه‌ای زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت درستی آن را ثابت کنید و در صورت نادرستی مثال نقض بیاورید.

الف) $A \Delta C = B \Delta C \Rightarrow A = B$

ب) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

پ) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

۱۱- برای هر دو مجموعه $A$ ، $B$ ثابت کنید $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ و $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ در این حالت تساوی تحت چه شرایطی

پاسخ تمرینات سری دوم مبانی ریاضیات:

ج ۱)

الف)

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x)) \vee \forall x\,(A(x) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$$

ب) مثال نقض:

جهان: $\mathbb{N}$

$A(x)$: $x$ زوج است.

$B(x)$: $x$ فرد است.

پ)

$$\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \wedge \exists x\,(A(x) \wedge B(x))$$

$$\Rightarrow \exists x\,(A(x) \wedge B(x))$$

ت) ~~[illegible]~~ مثال نقض:

جهان: $\mathbb{N}$

$A(x)$: $x$ زوج است.

$B(x)$: $x$ فرد است.

ث) ابتدا برای قسمت ج مثال نقضی می‌دهیم. مشابه مثال نقض ج و بررسی آن به این قسمت پاسخ داده خواهد شد (همچنین به اگر و تنها اگر بودن هم دقت شود)

ج)

$$\forall x\,(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,\big((\neg A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg B(x) \vee A(x))\big) \quad (I)$$

$$(\forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x)) \Leftrightarrow (\exists x\, \neg A(x) \vee \forall x\, B(x)) \wedge (\exists x\, \neg B(x) \vee \forall x\, B(x)) \quad (II)$$

مطلوب سؤال این است که ثابت کنیم $(II) \Rightarrow (I)$ یا مثال نقضی ارائه دهیم

با گرفتن $\mathbb{N}$ به عنوان جهان و $A(x)$: $x$ زوج، $B(x)$: $x$ فرد، مثال نقض را ارائه کرده‌ایم.

اما به منظور بررسی کامل این دو قسمت ((ث) و (ج)) گزاره‌ای که

۲

$$\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x)) \to (\forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x))$$

اثبات:

$$\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x((A(x)\to B(x)) \wedge (B(x)\to A(x)))$$

$$\cancel{\forall x((\neg A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg B(x) \vee A(x)))}$$

$$\Leftrightarrow \forall x(A(x)\to B(x)) \wedge \forall x(B(x)\to A(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x)\vee B(x)) \wedge \forall x(\neg B(x)\vee A(x))$$

لم:

$$\forall x(A(x)\vee B(x)) \to \exists x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)$$

این لم را ثابت می‌کنیم.

با به کمک این لم ~~...~~ و توضیحات داده شده خواهیم داشت:

$$\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x\,\neg A(x) \vee \forall x\, B(x)) \wedge (\exists x\,\neg B(x) \vee \forall x\, A(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)) \wedge (\forall x\, B(x) \to \forall x\, A(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x))$$

لذا ثابت می شود که: $\forall x(A(x)\leftrightarrow B(x)) \Longrightarrow (\forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x))$

ج۲)

$$A \Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

$$\overset{A=B}{=} (A\cup A)\setminus(A\cap A)$$

$$= A\setminus A$$

$$= \emptyset$$

ج۳)

الف)

$$[(A'\cup B)'\cup B]'\cup(A\cup B')'\cup A$$

$$= [(A'\cup B)\cap B']\cup(A\cup B')'\cup A$$

$$= [(A'\cap B')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\emptyset})]\cup(A\cup B')'\cup A$$

$$= (A'\cap B')\cup(A'\cap B)\cup A = (A'\cap(\underbrace{B'\cup B}_{V}))\cup A = (A'\cap V)\cup A = A'\cup A$$

ب)

۳

$$([(B'\cup C)'\cup A'\cup C]\cap D')\cup(A\cap B')\cup D$$

$$=([(B\cap C')\cup A'\cup C]\cap D')\cup(A\cap B')\cup D$$

$$=([((B\cup C)\cap(\underbrace{C'\cup C}_{V}))\cup A']\cap D')\cup(A\cap B')\cup D$$

$$=([(B\cup C)\cap V)\cup A']\cap D')\cup(A\cap B')\cup D$$

$$=((B\cup C\cup A')\cap D')\cup(A\cap B')\cup D$$

$$=(D\cup[(B\cup C\cup A')\cap D'])\cup(A\cap B')$$

$$=((D\cup(B\cup C\cup A'))\cap(\underbrace{D\cup D'}_{V}))\cup(A\cap B')$$

$$=((D\cup B\cup C\cup A')\cap V)\cup(A\cap B')$$

$$=D\cup C\cup(A'\cup B)\cup(A\cap B')$$

$$=D\cup C\cup[(A\cap B')'\cup(A\cap B')]$$

$$=D\cup C\cup V$$

$$=V$$

---

ج) ۱) از فرض $\begin{cases}A\cap B\neq\emptyset\\ A\cap C=\emptyset\end{cases}$ نشان می‌دهیم $(A\cap B)\setminus C\neq\emptyset$

$$A\cap C=\emptyset\Rightarrow \cancel{A\cap B\cap C}\;(A\cap C)\cap B=\emptyset$$

$$\Rightarrow (A\cap B)\cap C=\emptyset$$

$$\Rightarrow (A\cap B)\setminus C=A\cap B$$

$$A\cap B\neq\emptyset$$

$$\Rightarrow \boxed{(A\cap B)\setminus C\neq\emptyset}$$

ج ۴) حکم: $\underbrace{(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)}_{(ii)} \iff \underbrace{C \subseteq A}_{(i)}$

۲

$(i) \Rightarrow (ii)$:

$$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$$
$$= A\cap(B\cup C)$$

$(i) \Rightarrow A\cup C = A$

$(ii) \Rightarrow (i)$:

$$\underbrace{(A\cap B)}_{X}\cup C = A\cap \underbrace{(B\cup C)}_{Y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow X\cup C = A\cap Y \\ A\cap Y \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow X\cup C \subseteq A$$

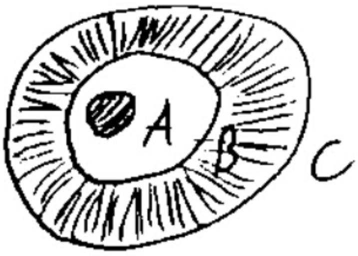
$$\left.\begin{array}{l} X\cup C \subseteq A \\ C \subseteq X\cup C \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{C \subseteq A}$$

ج ۶) به راحتی قابل بررسی است که در هر مجموعه $n$ عضوی، زیرمجموعه‌های دو عضوی آن که تعداد آن‌ها $\binom{n}{2}$ می‌باشد تشکیل یک خانواده اسپرنری می‌دهند یا به عبارت دقیق‌تر بازای هر $k$ که $0 \leq k \leq n$، زیرمجموعه‌های $k$ عضوی آن مجموعه $n$ عضوی تشکیل یک خانواده اسپرنری می‌دهند. حال چون $n=5$ و $\binom{5}{2}=10$، پس برای حل این سؤال کافیست زیرمجموعه‌های دو عضوی این مجموعه ۵ عضوی را در نظر بگیریم.

ج ۷) روش اول:

ابتدا سعی می کنیم با نمودار ون در مورد $D$ شهود بگیریم و سپس $D$ را حدس می‌زنیم و حکم را برای هر $A$ و $B$ و $C$ دلخواه که $A \subseteq B \subseteq C$ ثابت می کنیم.

هدف یافتن $D$ است به طوری که با فرض $A \subseteq B \subseteq C$، داشته باشیم:




$$\begin{cases} B \cap D = A \\ B \cup D = C \end{cases}$$

به نظر می رسد قسمت هاشور زده $D$ مورد نظر باشد. پس قرار می دهیم $D = A \cup (C \setminus B)$ و درستی دو شرط $\begin{cases} B \cap D = A \\ B \cup D = C \end{cases}$ را برای هر $A$ و $B$ و $C$ دلخواه که $A \subseteq B \subseteq C$ چک می کنیم و اگر دو شرط ذکر شده برای $D$ برقرار بودند پس $D$ را یافته‌ایم.

پس فرض کنیم $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه دلخواه باشند که $A \subseteq B \subseteq C$ و قرار می دهیم: $D = A \cup (C \setminus B)$. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} B \cap D &= B \cap (A \cup (C \setminus B)) \\ &= (B \cap A) \cup \underbrace{(B \cap (C \setminus B))}_{\emptyset} \\ &= B \cap A \\ &\overset{A \subseteq B}{=} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cup D &= B \cup (A \cup (C \setminus B)) \\ &= A \cup (B \cup (C \setminus B)) \\ &= A \cup C \\ &= C \end{aligned}$$

پس $D$ شرایط مورد نظر را دارد.

روش دوم:
بدون استفاده از نمودار ون و تنها با دو شرط ذکر شده سعی می‌کنیم $D$ را بیابیم.

برای $D$ باید داشته باشیم: $B\cap D=A$. پس $A\subseteq D$. پس
هدف یافتن مجموعه $X$ است که $A\cap X=\emptyset$ و با قرار دادن $D=A\cup X$، داشته باشیم: $\begin{cases} B\cup D=C \\ B\cap D=A \end{cases}$

$$B\cup D=C \Leftrightarrow B\cup(A\cup X)=C$$
$$\Leftrightarrow (A\cup B)\cup X=C$$
$$\underset{A\subseteq B}{\Leftrightarrow} B\cup X=C$$

پس اگر قرار دهیم: $X=C\setminus B$، ثابت می‌شود:
$$B\cup D=C$$

حال با قرار دادن $X=C\setminus B$ درستی $B\cap D=A$ را نیز چک می‌کنیم

$$B\cap D=A \Leftrightarrow B\cap(A\cup X)=A$$
$$\Leftrightarrow (B\cap A)\cup(B\cap X)=A$$
$$\underset{A\subseteq B}{\Longleftrightarrow} A\cup(B\cap X)=A$$

حال اگر $X=C\setminus B$، $B\cap X=\emptyset$ و لذا حکم ثابت شده است. پس
$D=A\cup(C\setminus B)$ گزینه مناسب است.

ج ۸)

الف)

$$(A \Delta B) \Delta C = \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) \Delta C$$

فرض کنیم $M = A \cup B \cup C$

$X \subseteq M$ باشد

تعریف می‌کنیم

$X' = M \setminus X$

$$= \big((A \cap B') \cup (B \cap A')\big) \Delta C$$

$$= \Big[\big((A \cap B') \cup (B \cap A')\big) \setminus C\Big] \cup \Big[C \setminus \big((A \cap B') \cup (B \cap A')\big)\Big]$$

$$= \Big[\big((A \cap B') \cup (B \cap A')\big) \cap C'\Big] \cup \Big[C \cap \big((A \cap B') \cup (B \cap A')\big)'\Big]$$

$$= \underbrace{\big((A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C')\big)}_{K} \cup \Big[C \cap \big((A' \cup B) \cap (B' \cup A)\big)\Big]$$

$$= K \cup \Big[\big((C \cap A') \cup (C \cap B)\big) \cap (B' \cup A)\Big]$$

$$= K \cup \Big[(A' \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C)\Big]$$

$$= \underbrace{(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A \cup B \cup C)}_{L}$$

همچنین می‌توان ثابت کرد که $A \Delta (B \Delta C) = L$ و بنابراین

$$\left.\begin{aligned} (A \Delta B) \Delta C &= L \\ A \Delta (B \Delta C) &= L \end{aligned}\right| \Rightarrow (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

ب) حکم را با استقرا ثابت می‌کنیم. برای بررسی پایه استقرا دو مجموعه $A$ و $B$ و $A \Delta B$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $x \in A \Delta B$

بنابر تعریف $A \Delta B$، داریم یا فقط $x \in A$ یا فقط $x \in B$ و $x \notin A \cap B$

لذا $x$ تنها در یکی از $A$ و $B$ آمده است و لذا در تعداد فردی از این دو مجموعه آمده است.

حال فرض کنیم حکم برای $n$ برقرار است. یعنی اگر $n$ مجموعه مثل $A_1, A_2, \ldots, A_n$ داشته باشیم و $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$، آنگاه $x$ در تعداد فردی از $A_i$ ها $i \in \{1, \ldots, n\}$ آمده است.

$n+1$ مجموعه $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم: $A = A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ و $B = A_{n+1}$. لذا $A \Delta B = A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n \Delta A_{n+1}$

حال فرض کنیم $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_{n+1}$. لذا $x \in A \Delta B$. لذا بنابر حالت دوتایی یا تنها $x \in A$ یا تنها $x \in B$ و $x \notin A \cap B$. اگر ~~$x \in B = A_{n+1}$~~ تنها $x \in B = A_{n+1}$ و $x \notin A$ که حکم ثابت شده است چون $x$ تنها در یکی از $A_i$ ها $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ آمده است. پس فرض کنیم $x \in A$ و $x \notin B$ لذا $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ و بنابر فرض استقرا $x$ در تعداد فردی از $A_i$ ها آمده است و لذا حکم ثابت شده است.

(19

الف)

$$
\begin{aligned}
B = B \cup (A \cap B) &= B \cup (A \cap C) = (B \cup A) \cap (B \cup C) \\
&= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
&= (A \cap B) \cup C \\
&= (A \cap C) \cup C = C
\end{aligned}
$$

$\longleftarrow$ لذا $B = C$

$A \Delta B = A \Rightarrow A \Delta (A \Delta B) = A \Delta A$ (ب

$\underline{9}$

$\Rightarrow (A \Delta A) \Delta B = \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset \Delta B = \emptyset$

$\Rightarrow B = \emptyset$

$A \Delta B = \emptyset \Rightarrow A \Delta (A \Delta B) = A \Delta \emptyset$ (ت

$\Rightarrow (A \Delta A) \Delta B = A$

$\Rightarrow \emptyset \Delta B = A$

$\Rightarrow \boxed{B = A}$

$A \Delta B = C \Delta D \Leftrightarrow (A \Delta B) \Delta B = (C \Delta D) \Delta B$ (ث

$\Leftrightarrow A \Delta \underbrace{(B \Delta B)}_{\emptyset} = (C \Delta D) \Delta B$

$\Leftrightarrow A = (C \Delta D) \Delta B$

$\Leftrightarrow A \Delta C = ((C \Delta D) \Delta B) \Delta C$

$\Leftrightarrow A \Delta C = \underbrace{(C \Delta C)}_{\emptyset} \Delta (B \Delta D)$

$\Leftrightarrow A \Delta C = B \Delta D$

$$\Big( ((C \Delta D) \Delta B) \Delta C = (C \Delta (D \Delta B)) \Delta C$$
$$= C \Delta (C \Delta (D \Delta B))$$
$$= (C \Delta C) \Delta (D \Delta B) \Big)$$

۱۰

ج ۱۰)

الف) $A \Delta C = B \Delta C \Rightarrow (A \Delta C)\Delta C = (B \Delta C)\Delta C$

$$\Rightarrow A\Delta(C\Delta C) = B\Delta(C\Delta C)$$

$$\Rightarrow A\Delta\emptyset = B\Delta\emptyset$$

$$\Rightarrow \boxed{A = B}$$

ب) ثابت می کنیم: $C \setminus (A \cup B) = (C\setminus A)\cap(C\setminus B)$.

برای این منظور ثابت می کنیم: $x \in C\setminus(A\cup B) \Leftrightarrow x \in [(C\setminus A)\cap(C\setminus B)]$

$$x \in C\setminus(A\cup B) \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A\cup B$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A\cup B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x\in A \vee x \in B)$$

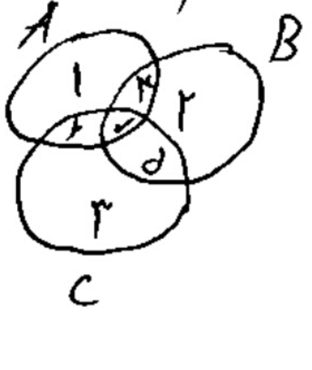
$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow x \in (C\setminus A) \wedge x \in (C\setminus B)$$

$$\Leftrightarrow x \in [(C\setminus A)\cap(C\setminus B)]$$

بنابراین $C\setminus(A\cup B) = (C\setminus A)\cup(C\setminus B)$ درست نبوده و باید برای آن مثال نقض بیاوریم. به این منظور از نمودار ون کمک می گیریم.




$$\Rightarrow \begin{cases} C\setminus(A\cup B) = \{۳,۵,۶,۷\}\setminus\{۱,۲,۴,۵,۶,۷\} = \{۳\} \\ C\setminus A = \{۳,۵,۶,۷\}\setminus\{۱,۴,۵,۶,۷\} = \{۳,۵\} \\ C\setminus B = \{۳,۵,۶,۷\}\setminus\{۲,۴,۵,۷\} = \{۳,۶\} \end{cases}$$

لذا $(C\setminus A)\cup(C\setminus B) = \{۳,۵,۶\}$، $\{۳,۵,۶\} \neq \{۳\}$ لذا $C\setminus(A\cup B) \neq (C\setminus A)\cup(C\setminus B)$

ب) ~~[illegible]~~ ثابت می‌کنیم این رابطه درست است. به این منظور

ثابت می‌کنیم: $x \in (A\cup B)\setminus C \Leftrightarrow x \in (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{x \in (A\cup B)\setminus C}} &\Leftrightarrow x \in A\cup B \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x\in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x\in B \wedge x\notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A\setminus C) \vee (x \in B\setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A\setminus C)\cup(B\setminus C)
\end{aligned}$$

---

ج) (1

~~[illegible]~~ 1) $P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$:

ثابت می‌کنیم: $x \in P(A)\cap P(B) \Leftrightarrow x \in P(A\cap B)$:

$$\begin{aligned}
x \in P(A)\cap P(B) &\Leftrightarrow x\in P(A) \wedge x \in P(B) \\
&\Leftrightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B \\
&\Leftrightarrow x \subseteq A\cap B \\
&\Leftrightarrow x \in P(A\cap B)
\end{aligned}$$

2) $P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$:

ثابت می‌کنیم: $x \in P(A)\cup P(B) \Rightarrow x \in P(A\cup B)$:

$$\begin{aligned}
x \in P(A)\cup P(B) &\Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B) \\
&\Leftrightarrow x \subseteq A \vee x \subseteq B \\
&\Rightarrow x \subseteq A\cup B \\
&\Leftrightarrow x \in P(A\cup B)
\end{aligned}$$

پس به خاطر $\Rightarrow$، $x \in P(A)\cup P(B) \Rightarrow x \in P(A\cup B)$.

بررسی شرط تساوی: مشکل در $\Rightarrow$ ایجاد شد. پس باید $A$ و $B$ طوری باشند که $x \subseteq A\cup B$، $x$ نتیجه دهد

۱۲

$x \subseteq A$ یا $x \subseteq B$.

چون $x$ را دلخواه گرفتیم در اول، پس برای تساوی باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall x \subseteq A \cup B \quad x \subseteq A \vee x \subseteq B$$

ثابت می‌کنیم در این صورت $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

فرض کنیم چنین نباشد پس $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$.

پس $A \setminus B \neq \emptyset$ و $B \setminus A \neq \emptyset$.

فرض کنیم $u \in A \setminus B$ (چون $A \setminus B \neq \emptyset$، این $u$ موجود است)

و $v \in B \setminus A$ (چون $B \setminus A \neq \emptyset$، این $v$ موجود است)

حال داریم: $\{u, v\} \subseteq A \cup B$ اما

$\{u, v\} \not\subseteq A$ و $\{u, v\} \not\subseteq B$

چون $v \notin A$ ✓ چون $u \notin B$ ✓

پس در این صورت شرط مورد نظر $(\forall x \subseteq A \cup B \quad x \subseteq A \vee x \subseteq B)$ برقرار نیست. پس به تناقض رسیده‌ایم.

پس $A \setminus B = \emptyset$ یا $B \setminus A = \emptyset$ پس $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

حال به راحتی قابل بررسی است که اگر $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ آنگاه $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$.

پس گزاره زیر را ثابت کرده‌ایم:

$$\boxed{P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \iff \forall x \subseteq A \cup B \quad x \subseteq A \vee x \subseteq B}$$