

تاریخ: ۲۱ مهر ۱۳۹۴  
مدت امتحان: ۱۵ دقیقه  
مدرس: مجتهدی

# آزمونک نخست مبانی علوم ریاضی



شماره‌ی دانشجویی: .....

نام و نام خانوادگی: .....

۱. (۵ نمره) آیا  $A = B$  نتیجه می‌دهد  $A = B$ ؟ چرا؟

**جواب.** خیر. چنین نتیجه‌گیری‌ای صحیح نمی‌باشد. برای نشان دادن این که یک حکم کلی نادرست است، کفایت یک مثال نقض بیاوریم. فرض کنید  $A := \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$  و همچنین  $B := \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ . در این صورت،

$$\bigcup A = \bigcup B = \{a, b, c, d\}$$

حال آن که  $A \neq B$ .

موفق باشید.



تاریخ: ۵ آبان ۱۳۹۴  
مدت امتحان: ۲۰ دقیقه  
مدرس: مجتهدی

## آزمونک دوم مبانی علوم ریاضی

نام و نام خانوادگی: .....

شماره‌ی دانشجویی: .....

۱. از احکام زیر کدامیک درست است؟ برای آن‌هایی که درست است اثبات بیاورید و برای آن‌هایی که نادرست است مثال نقض بیاورید.

$$(A) \quad (A \cap (B \Delta C)) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad (\text{نمره } 3)$$

**جواب.** این حکم درست است:

$$\begin{aligned} A \cap (B \Delta C) &= A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] \stackrel{*}{=} (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) \\ &\stackrel{*}{=} [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)] = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \end{aligned}$$

دقت کنید که در تساوی‌های بالا از این حکم استفاده کردیم که عملگر اشتراک روی اجتماع (در تساوی  $*$ ) و تفاضل (در تساوی  $*$ ) توزیع می‌شود.

$$(B) \quad (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \quad (\text{نمره } 5)$$

**جواب.** این تساوی نیز برقرار است. اولاً توجه داریم که  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$  زیرا:

$$X \setminus (Y \setminus Z) = X \cap (Y \cap Z) = X \cap (Y' \cup Z) = (X \cap Y') \cup (X \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$$

همچنین  $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$  زیرا:

$$(X \setminus Y) \setminus Z = X \cap Y' \cap Z' = X \cap (Y' \cap Z') = X \cap (Y \cup Z)' = X \setminus (Y \cup Z)$$

حالا تساوی‌های زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 (A\Delta B)\Delta C &= [((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C] \cup [C \setminus \overbrace{((A \setminus B) \cup (B \setminus A))}^{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}] \\
 &= [((A \setminus B) \setminus C) \cup ((B \setminus A) \setminus C)] \cup [C \setminus ((A \cup B) \setminus (A \cap B))] \quad (۱) \\
 &= [(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C))] \cup [(C \setminus (A \cup B)) \cup (C \cap A \cap B)] \\
 &= (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

حال از تقارن موجود در تساوی نهایی می‌توان نتیجه گرفت که اگر جای  $A$  و  $C$  را عوض کنیم دو عبارت با هم برابر می‌مانند، یعنی داریم  $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$ . بنابراین با توجه به جابه‌جایی بودن عملگر  $\Delta$  می‌توان نتیجه گرفت که  $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ . اگر این اثبات به مذاقتان خوش نمی‌آید، می‌توانید همان روند ساده‌سازی در معادله ۱ را برای  $A\Delta(B\Delta C)$  دوباره تکرار کنید:

$$\begin{aligned}
 A\Delta(B\Delta C) &= (C\Delta B)\Delta A = [((C \setminus B) \cup (B \setminus C)) \setminus A] \cup [A \setminus \overbrace{((C \setminus B) \cup (B \setminus C))}^{(C \cup B) \setminus (C \cap B)}] \\
 &= [((C \setminus B) \setminus A) \cup ((B \setminus C) \setminus A)] \cup [A \setminus ((C \cup B) \setminus (C \cap B))] \\
 &= [(C \setminus (B \cup A)) \cup (B \setminus (C \cup A))] \cup [(A \setminus (C \cup B)) \cup (A \cap C \cap B)] \\
 &= (C \setminus (B \cup A)) \cup (B \setminus (C \cup A)) \cup (A \setminus (C \cup B)) \cup (C \cap B \cap A) \\
 &= (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C) = (A\Delta B)\Delta C
 \end{aligned}$$

(ج) (۲نمره)  $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$ .

**جواب.** این تساوی نیز درست است. زیرا

$$\begin{aligned}
 a \in A &\implies \{a\} \in \mathcal{P}(A) \implies a \in \{a\} \in \mathcal{P}(A) \implies a \in \bigcup \mathcal{P}(A) \\
 a \in \bigcup \mathcal{P}(A) &\implies \exists X (a \in X \wedge X \in \mathcal{P}(A)) \implies \exists X (a \in X \subseteq A) \implies a \in A
 \end{aligned}$$

موفق باشید.