آزمون میان‌ترم مبانی علوم ریاضی

تاریخ: ۳۰ فروردین ۱۳۹۴
مدت امتحان: ۹۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

---

۱. (۲۰ نمره) از گزاره‌های زیر کدام‌یک معتبر است؟ درستی یکی از آن‌ها را به کمک جدول ارزش نشان دهید.

(آ) $\forall x A(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)$

جواب. این گزاره معتبر است.

(ب) $[(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)] \to (p \leftrightarrow q)$

جواب. این گزاره معتبر است. به راحتی به کمک جدول ارزش زیر می‌توان این موضوع را مشاهده کرد:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$	$p \leftrightarrow q$	$[(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)] \to (p \leftrightarrow q)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(ج) $[((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow s] \to (p \leftrightarrow s)$

جواب. این گزاره نامعتبر است.

۲. (۲۰ نمره) برای اثبات کدام‌یک از گزاره‌های زیر (در صورت معتبر بودن) به اصل انتخاب نیاز داریم؟ به انتخاب! خود یکی از آن گزاره(ها) را اثبات کنید.

(آ) تابع $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود است طوری‌که برای هر $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ داریم $f(X) \in X$.

جواب. برای اثبات این حکم نیازی به اصل انتخاب نیست. توجه کنید که تابع f را می‌توان تابعی در نظر گرفت که به هر مجموعه‌ی ناتهی، کوچکترین عضوش را نسبت می‌دهد.

(ب) برای هر ترتیب جزئی مثل $R \neq \emptyset$، رابطه‌ی مرتب خطی S موجود است طوری‌که $R \supseteq S \neq \emptyset$ و

$$\mathsf{dmn}(R) \cap \mathsf{rng}(S) \subseteq \mathsf{dmn}(S)$$

جواب. برای اثبات این گزاره به اصل انتخاب نیاز است. به زبان ساده، حکم بالا بیان می‌کند که هر درخت (مجموعه‌ی مرتب جزئی R) دارای یک شاخه‌ی ماکسیمال (رابطه خطی S) است. حتی می‌توان نشان داد که حکم فوق با اصل انتخاب معادل است.

(ج) برای هر تابع پوشای $f : A \longrightarrow B$، تابعی مثل $g : B \longrightarrow A$ موجود است طوری‌که $f \circ g = \mathsf{Id}_B$.

جواب. برای اثبات این حکم به اصل انتخاب نیاز است: می‌دانیم f^{-1} یک رابطه است و بنابراین طبق اصل انتخاب، تابع $g \subseteq f^{-1}$ وجود دارد طوری‌که دامنه‌ی g و f^{-1} با هم برابرند. به‌راحتی می‌توان نشان داد که تابع g دارای خواص مورد انتظار است.

(د) برای هر تابع پوشای $f : A \longrightarrow B$، تابعی مثل $g : B \longrightarrow A$ موجود است طوری‌که $g \circ f = \mathsf{Id}_A$.

جواب. این حکم غلط است.

اصل انتخاب: برای هر رابطه مثل R، تابعی مثل f وجود دارد طوریکه $f \subseteq R$ و $\mathsf{dmn}(R) = \mathsf{dmn}(f)$.

۳. (۲۰ نمره) برای رابطه‌ی R نشان دهید اگر $R = R^{-1} \circ R$ آنگاه R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی دامنه‌ی خودش است.

جواب. از آن‌جا که $R = R^{-1} \circ R$، می‌توان نتیجه گرفت

$(x, y) \in R$ اگر و فقط اگر دست‌کم برای یک z داشته باشیم $(x, z), (y, z) \in R$

به راحتی از شرط بالا دیده می‌شود که R متقارن است. همچنین اگر $(x, y) \in R$ آن‌گاه دوباره به کمک شرط فوق داریم $(x, x) \in R$. بنابراین R بازتابی نیز هست. حالا برای این‌که نشان دهیم R تراگذری است، فرض کنید $(x, y), (y, z) \in R$. بنابر تقارنی بودن داریم $(x, y), (z, y) \in R$. پس طبق شرط بالا، $(x, z) \in R$.

۴. (۲۰ نمره) کدام‌یک از تعاریف زیر برای سه‌تایی مرتب مناسب نیست؟ با یک مثال درستی ادعای خود را نشان دهید.

(آ) $(x, y, z) := \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$،

جواب. این تعریف برای سه‌تایی مرتب مناسب نیست: $(a, b, a) = (a, a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

(ب) $(x, y, z) := \{\{\{x\}, \{x, y\}\}, \{\{y\}, \{y, z\}\}\}$

جواب. این تعریف نیز برای سه‌تایی مرتب مناسب نیست. توجه کنید که با توجه به تعریف استاندارد برای زوج مرتب داریم: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. بنابراین تعریف بالا برای سه‌تایی مرتب به فرم زیر خلاصه می‌شود:

$$(x, y, z) := \{(x, y), (y, z)\}$$

بنابراین داریم $\{(a,b),(b,a)\} = (b,a,b) = (a,b,a)$.

موفق باشید.

بسمه تعالی

آزمون میان‌ترم مبانی علوم ریاضی

تاریخ: ۳ آذر ۱۳۹۴
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

---

۱. (۲۰نمره) فرض کنید R یک رابطه باشد.

(آ) (۱۰نمره) در این صورت آیا رابطه‌ی $R\circ R^{-1}$ رویِ دامنه‌اش، هم‌ارزی است؟ اگر جواب مثبت است اثبات کنید و اگر منفی است، مثال نقض بیاورید.

جواب. با توجّه به تعریفِ ترکیب دو رابطه و همچنین تعریفِ وارونِ یک رابطه داریم:

$$(x,z)\in R\circ R^{-1} \iff \exists y\,[(x,y)\in R^{-1}\wedge (y,z)\in R] \iff \exists y\,[(y,x)\in R\wedge (y,z)\in R]$$

بنابراین از شرطِ معادلی که در سمت راست به دست آمده واضح است که $R^{-1}\circ R$ بازتابی (روی دامنه‌اش) و تقارنی است، امّا لزومی ندارد که این رابطه ترایایی باشد. مثال نقض:

$$R:=\{(۱,۲),(۱,۳),(۰,۳),(۰,۴)\}$$

$$R\circ R^{-1}=\{(۲,۳),(۳,۲),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴)\}$$

رابطه‌ی معرّفی شده در بالا، متعدّی نیست زیرا $(۲,۳),(۳,۴)\in R\circ R^{-1}$ امّا $(۲,۴)\notin R\circ R^{-1}$.

(ب) (۱۰نمره) نشان دهید $R\circ R^{-1}$ پادمتقارن است اگر و فقط اگر R تابع باشد.

جواب. ابتدا فرض کنید R تابع باشد. نشان می‌دهیم که $R\circ R^{-1}$ پادمتقارن است، یعنی اگر $(x,z),(z,x)\in R\circ R^{-1}$، آن‌گاه $x=z$. با توجه به بند قبل داریم

$$(x,z)\in R\circ R^{-1} \iff \exists y\,[(y,x)\in R\wedge (y,z)\in R] \tag{۱}$$

بنابراین چون R تابع است، اگر $(x,z)\in R\circ R^{-1}$ آن‌گاه $x=z$. پس به‌طور اولیٰ، $(x,z)\in R\circ R^{-1}$ و $(z,x)\in R\circ R^{-1}$ نتیجه می‌دهد $x=z$.

حال برعکس فرض کنید $R\circ R^{-1}$ پادتقارنی باشد. باتوجّه به بند قبل می‌دانیم که این رابطه، متقارن نیز هست. یعنی $(x,z)\in R\circ R^{-1}$ نتیجه می‌دهد $(z,x)\in R\circ R^{-1}$ و بنابراین چون $R\circ R^{-1}$ پادمتقارن است، $x=z$. حالا با استفاده از معادله ۱ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\exists y\,[(y,x)\in R\wedge (y,z)\in R] \implies x=z$$

یا به عبارتِ دیگر، R تابع است.

۲. (۲۰نمره) از گزاره‌های زیر کدام معتبر است؟ کدام نامعتبر است؟ به کمکِ جبر گزاره‌ای، یکی از آن‌ها که معتبر است را اثبات کنید.

(آ) (۱۰نمره) $[(A \to B) \to B] \to (\neg B \to A)$.

جواب. این گزاره معتبر است:

$$(A \to B) \to B \equiv \neg(\neg A \vee B) \vee B \equiv (A \wedge \neg B) \vee B \equiv (A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \equiv A \vee B$$

$$\neg B \to A \equiv B \vee A$$

بنابراین $[(A \to B) \to B] \to (\neg B \to A)$ معتبر است.

(ب) (۵نمره) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$.

جواب. این گزاره معتبراست.

(ج) (۵نمره) $(((A \to B) \to C) \to D) \to (A \vee B \vee C \vee D)$.

جواب. این گزاره معتبر نیست، زیرا در جدول ارزش، اگر ارزشِ گزاره‌هایِ A و B و C و D همگی غلط باشند، ارزشِ $((A \to B) \to C) \to D$ درست می‌شود و بنابراین ارزشِ گزاره‌ی موردنظر در سؤال غلط می‌شود. بنابراین این گزاره معتبر نیست.

۳. (۲۰نمره) کدام‌یک از احکامِ زیر درست است؟ کدام نادرست است؟ برایِ یکی از آن(ها) که درست هستند اثبات ارائه کنید یا برای یکی از آن(ها) که نادرستند، مثال نقض بیاورید:

جواب. (بارم‌بندی: تشخیص اعتبار یا عدم اعتبار هر بخش ۵ نمره و اثبات یا مثال نقض ۵نمره)

(آ) با فرضِ $A \cap B \neq \emptyset$ داریم $(\bigcap A) \cap (\bigcap B) = \bigcap(A \cap B)$،

جواب. این گزاره نادرست است. مثالِ نقض:

$$A := \{\{a,b\},\{a,c\}\} \quad B := \{\{a,b\}\} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap A = \{a\} \quad , \quad \bigcap B = \{a,b\}$$

$$A \cap B = \{\{a,b\}\} \quad , \quad \bigcap(A \cap B) = \{a,b\} \neq \{a\} = (\bigcap A) \cap (\bigcap B)$$

(ب) $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cap B)$،

جواب. این حکم معتبر است:

$$X\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)\Leftrightarrow[X\subseteq A\wedge X\subseteq B]\Leftrightarrow X\subseteq A\cap B\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(A\cap B)$$

(ج) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cup B)$،

جواب. این حکم نامعتبر است:

$$A:=\{a\}\quad,\quad B:=\{b\}\quad\Longrightarrow\quad\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{a\}\}\quad,\quad\mathcal{P}(B)=\{\emptyset,\{b\}\}$$

$$\mathcal{P}(A\cup B)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\neq\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$$

۴. (۲۰نمره) فرض کنید $f:A\longrightarrow B$ یک تابع باشد. ثابت کنید اگر f پوشا باشد در این صورت تابع $g:B\longrightarrow A$ وجود دارد طوری‌که $f\circ g=\mathsf{id}_B$.

جواب. رابطه‌ی f^{-1} را درنظر بگیرید. در این صورت $\mathsf{dmn}(f^{-1})=\mathsf{rng}(f)=B$. بنابراین طبق اصل انتخاب، تابعِ $g\subseteq f^{-1}$ وجود دارد طوری‌که $\mathsf{dmn}(g)=\mathsf{dmn}(f^{-1})=B$ و هم‌چنین $\mathsf{rng}(g)\subseteq\mathsf{dmn}(f^{-1})=A$. به عبارتِ دیگر $g:B\longrightarrow A$. اکنون نشان می‌دهیم $f\circ g=\mathsf{id}_B$. از آن‌جایی که $\mathsf{dmn}(f\circ g)=\mathsf{dmn}(\mathsf{id}_B)=B$، کافیست نشان دهیم برای هر $b\in B$ داریم: $f\circ g(b)=b$.

$$(b,g(b))\in g\quad\Rightarrow\quad(b,g(b))\in f^{-1}\quad\Rightarrow\quad(g(b),b)\in f\quad\Rightarrow\quad f(g(b))=b$$

۵. (۲۰نمره) فرض کنید $<$ یک ترتیب خطی روی A باشد و $f:A\longrightarrow A$ طوری باشد که

$$a_1<a_2\quad\Longrightarrow\quad f(a_1)<f(a_2)$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت که f پوشا است؟ یک‌به‌یک چه‌طور؟ ادعای خود را با ارائه‌ی مثال نقض یا برهان، ثابت کنید.

جواب. لزومی ندارد که f پوشا باشد. به‌عنوان مثال نقض می‌توانید این تابع را در نظر بگیرید:

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\qquad,\qquad f(n):=2n$$

اما تابع f حتماً یک‌به‌یک است. فرض کنید $f(x)=f(y)$. در این صورت، چون $(A,<)$ یک ترتیب خطی است، یکی از سه حالتِ زیر رخ می‌دهد:

$$x<y\qquad x=y\qquad x>y$$

اگر $x < y$ باشد، آن‌گاه طبق فرض سؤال داریم $f(x) < f(y)$ و این با ضدبازتابی بودنِ $<$ در تضاد است (توجّه کنید که $f(x) = f(y)$). اگر هم $y < x$ باشد، دوباره طبقِ فرض $f(y) < f(x)$ و این نتیجه نیز با ضدبازتابی بودنِ $<$ در تضاد است. بنابراین باید داشته باشیم $x = y$.

بارم‌بندی: پوشا نبودن و مثال نقضش ۱۰ نمره و یک‌به‌یک بودن و اثباتش ۱۰ نمره.

موفق باشید.

بسمه تعالی

تاریخ: ۳ آذر ۱۳۹۳
مدت امتحان: ۲ ساعت
مدرس: مجتهدی

امتحان میان‌ترم مبانی ریاضیات

۱. (۲۰ نمره) از گزاره‌های زیر کدام‌یک معتبر نیست؟ مثال نقض بیاورید.

(آ) $\forall x \exists y (A(x) \vee B(y)) \rightarrow \exists y \forall x (A(x) \vee B(y))$، که در آن $A(x)$ متغیر y ندارد و $B(y)$ متغیر x ندارد.

(ب) $\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists y \forall x A(x, y)$.

(ج) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$.

(د) $(\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$.

۲. (۱۵ نمره) روی مجموعه‌ی اعداد صحیح، رابطه‌ی $\sim$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: $a \sim b$ اگر و فقط اگر مجموعه‌ی همه‌ی اعداد اولی که a مضرب آن‌ها است (مجموعه‌ی همه‌ی عوامل اول a) با مجموعه‌ی همه‌ی اعداد اولی که b مضرب آن‌ها است برابر باشد.

(آ) نشان دهید $\sim$ یک هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ است.

(ب) کلاس‌های هم‌ارزی $[۲]_\sim$، $[۱]_\sim$ و $[۰]_\sim$ را محاسبه کنید.

۳. (۱۵ نمره) رابطه‌ی $\preccurlyeq$ را روی اعداد صحیح به این صورت تعریف می‌کنیم: $a \preccurlyeq b$ اگر و فقط اگر مجموعه‌ی همه‌ی عوامل اول a زیرمجموعه‌ی همه‌ی عوامل اول b باشد.

(آ) نشان دهید $\preccurlyeq$ یک شبه‌ترتیب روی $\mathbb{Z}$ است.

(ب) از روی این شبه‌ترتیب، یک رابطه‌ی ترتیب جزئی ضعیف روی $\mathbb{Z}/\sim$ به‌دست آورید، که در آن $\sim$ همان رابطه‌ی هم‌ارزی در سؤال قبل است.

۴. (۱۵ نمره) اصل خوش‌بنیادی را بیان کنید و به کمک آن نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی x، $x \notin x$.

۵. (۲۰ نمره) کدام‌یک از روابط مجموعه‌ایِ زیر درست نیست؟ مثال نقض بیاورید:

(آ) اگر $A \Delta C = B \Delta C$ آن‌گاه $A = B$.

(ب) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

(ج) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

موفق باشید.