تاریخ: ۲۵ خرداد ۱۳۹۴
مدت امتحان: ۲۴۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

آزمون پایان ترم مبانی علوم ریاضی

۱. (۱۰ نمره) ثابت کنید $\aleph_0^{(2^{\aleph_0})} = 2^{(2^{\aleph_0})}$.

جواب.

$$2 \leq \aleph_0 \Rightarrow 2^{2^{\aleph_0}} \leq \aleph_0^{2^{\aleph_0}} \leq (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{(\aleph_0 . 2^{\aleph_0})} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

که در آن تساویِ آخر از این قضیه استفاده می‌کند که حاصل‌ضرب دو عدد اصلیِ نامتناهی برابر با ماکسیموم آن‌ها می‌شود. حال با استفاده از قضیه‌ی کانتور_برنشتاین می‌توان نتیجه گرفت $\aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

۲. (۱۵ نمره) تعداد اعضای (عددِ اصلی یا کاردینال) مجموعه‌های زیر را با هم مقایسه کنید و برای مقایسه‌ی خود استدلال کنید:
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$، $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$، $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$، $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$.

جواب. داریم:

$$|\mathbb{Q}| = \aleph_0, |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \Rightarrow |\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}, |\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}, |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 . \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

که در آن تساویِ آخر از این قضیه استفاده می‌کند که حاصل‌ضرب دو عدد اصلیِ نامتناهی برابر با ماکسیموم آن‌ها می‌شود.

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = (2^{\aleph_0})^{(2^{\aleph_0})} = 2^{(\aleph_0 . 2^{\aleph_0})} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

که در آن تساویِ آخر از این قضیه استفاده می‌کند که حاصل‌ضرب دو عدد اصلیِ نامتناهی برابر با ماکسیموم آن‌ها می‌شود. حال از آن‌جا که برای هر مجموعه‌ی A داریم

$$|A| \lneqq |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

می‌توان برای هر عدد اصلیِ κ نتیجه گرفت $\kappa \lneqq 2^{\kappa}$ و بنابراین $2^{\aleph_0} \lneqq 2^{2^{\aleph_0}}$. پس:

$$|\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| \lneqq |\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$$

۳. (۱۵ نمره) مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}$ با رابطه‌ی کوچکتری روی $\mathbb{R}$ ($<_{\mathbb{R}}$) خوش‌ترتیب است. عدد اصلی (کاردینال) این مجموعه حداکثر چقدر است؟ چرا؟ (راه‌نمایی: یک تابع یک به یک مثل $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ معرفی کنید)

جواب. $|X| \leq \aleph_۰$. برای اثبات این مطلب تابعِ یک‌به‌یک $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: برای هر $x \in X$ در صورتی که $Y := \{y \in X : x <_{\mathbb{R}} y\} \neq \emptyset$ فرض کنید x^+ کوچکترین عضو از مجموعه‌ی Y باشد. توجه داریم که این کوچکترین عضو طبق خوش‌ترتیبی X وجود دارد. در صورتی هم که $Y = \emptyset$ قرار دهید $x^+ := x + ۱$. حال برای هر $x \in X$ مقدار $f(x)$ را برابر با یک عدد گویا بین x و x^+ انتخاب می‌کنیم. می‌توان نشان داد که این تابع یک‌به‌یک است و بنابراین $|X| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_۰$.

حال اگر $X = \mathbb{N}$ قرار دهیم، X خوش‌ترتیب است و $|X| = \aleph_۰$. بنابراین عدد اصلیِ X حداکثر می‌تواند $\aleph_۰$ باشد.

۴. (۲۰ نمره) (آ) حکم زیر را به زبان دقیق ریاضی بیان کنید و اثبات کنید:

«اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شمارا، شمارا است»

جواب. ابتدا توجه داشته باشید که مجموعه‌ی A را شمارا گوییم اگر $|A| \leq \aleph_۰$ یا به عبارت دیگر تابعی یک‌به‌یک $h : A \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود باشد یا معادلاً تابعی پوشا مثل $k : \mathbb{N} \longrightarrow A$ موجود باشد.

بیان دقیق حکم فوق: «فرض کنید X یک مجموعه‌ی شمارا باشد، یعنی $|X| \leq \aleph_۰$ و همچنین برای هر $x \in X$، x یک مجموعه‌ی شمارا باشد. در این صورت $\bigcup X$ شمارا است.»

اثبات: از آن‌جایی که X شمارا است، تابع پوشای $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ موجود است. به زبان ساده‌تر یعنی $X = \{f(۰), f(۱), f(۲), \ldots\}$.
اگر $f(i)$ را با x_i نمایش دهیم یعنی داریم $X = \{x_۰, x_۱, \ldots\}$.

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$، چون x_n مجموعه‌ای شمارا است، بنابراین تابع پوشای $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow x_n$ موجود است. اکنون تابع $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup X$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: $g(m, n) := f_m(n)$. به وضوح این تابع پوشا است و بنابراین

$$|\bigcup X| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_۰$$

نکته‌ی جالب توجه در اثبات فوق این است که از اصل انتخاب استفاده شده است و استفاده از اصل انتخاب در اثبات این حکم ضروری است.

(ب) تابع $f : A \to B$ را درنظر بگیرید. اگر B شمارا باشد و برای هر $b \in B$ مجموعه‌ی $f^{-۱}[b]$ نیز شمارا باشد، نشان دهید A نیز شمارا است.

جواب. مجموعه‌ی $X := \{f^{-۱}[b] : b \in B\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $\bigcup X = A$. و هم‌چنین با توجه به این فرض مسأله که B شمارا است می‌توان نتیجه گرفت X نیز مجموعه‌ای شمارا است و هم‌چنین با توجه به دیگر فرض مسأله می‌توانیم نتیجه بگیریم که اعضای X نیز شمارا هستند. حال بنابر قسمت قبل می‌توان نتیجه گرفت $A = \bigcup X$ شمارا است.

۵. (۲۰ نمره) با فرض خواص مجموعه‌ی اعداد صحیح:

(آ) تعریف اعداد گویا را بنویسید.

جواب. برای نوشتن تعریف اعداد گویا، ابتدا رابطه‌ی $\sim$ را روی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ به این صورت تعریف می‌کنیم: $(m,n) \sim (p,q)$ اگر و فقط اگر $m.q = n.p$، که در آن $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim$$

(ب) تعریف تابع ضرب روی اعداد گویا را بنویسید و نشان دهید این تابع خوش‌تعریف است.

جواب. تابع ضرب روی $\mathbb{Q}$ به این صورت تعریف می‌شود: فرض کنید $x,y \in \mathbb{Q}$ و $x = [(m,n)]_\sim$ و $y = [(p,q)]_\sim$:

$$x.y := [(mp,nq)]_\sim$$

اکنون خوش‌تعریفی را برای ضرب ثابت می‌کنیم. برای این‌کار باید نشان دهیم اگر $(m,n) \sim (m',n')$ و $(p,q) \sim (p',q')$ آن‌گاه $(mp,nq) \sim (m'p',n'q')$. با استفاده از فرض $(m,n) \sim (m',n')$ داریم $mn' = nm'$ و همچنین با فرض $(p,q) \sim (p',q')$ داریم $pq' = qp'$. حا با ضرب دو تساویِ اخیر داریم $mn'pq' = nm'qp'$ و بنابراین $(mp,nq) \sim (m'p',n'q')$.

۶. (۲۰نمره) تعریف برش‌های ددِکیند برای اعداد حقیقی را درنظر بگیرید.

(آ) تعریف $0_{\mathbb{R}}$ و هم‌چنین رابطه‌ی $<_{\mathbb{R}}$ را بنویسید.

جواب.

$0_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\} \quad , \quad x <_{\mathbb{R}} y$ اگر و فقط اگر $x \subsetneq y$

(ب) نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $x >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ اگر و فقط اگر $0_{\mathbb{Q}} \in x$.

جواب. ابتدا فرض کنید $x >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$. بنابراین $x \supsetneq 0_{\mathbb{R}}$. پس عدد گویای $a \in x \setminus 0_{\mathbb{R}}$ موجود است. از آن‌جا که

$$a \notin 0_{\mathbb{R}} := \{y \in \mathbb{Q} : y <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$$

می‌توان نتیجه گرفت $a \geq_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}$. حال از آن‌جا که x یک برش ددِکیند است و $a \in x$، می‌توان نتیجه گرفت $0_{\mathbb{Q}} \in x$.
برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $0_{\mathbb{Q}} \in x$. حال از آن‌جا که x یک برش ددِکیند است، با استفاده از تعریف $0_{\mathbb{R}}$ می‌توان نتیجه گرفت $x \supseteq 0_{\mathbb{R}}$. از طرفی $0_{\mathbb{Q}} \in x \setminus 0_{\mathbb{R}}$. بنابراین $x \supsetneq 0_{\mathbb{R}}$ و در نتیجه $x >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$.

موفق باشید.

بسمه تعالی

تاریخ: ۱۴ دی ۱۳۹۴
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
مدرس: مجتهدی

آزمون پایان‌ترم مبانی علوم ریاضی

۱. (آ) (۱۰ نمره) تعریفِ مجموعه‌ی استقرایی را بنویسید.

جواب. مجموعه‌ی A را گوییم استقرایی است اگر

- $0 = \emptyset \in A$،
- اگر $a \in A$ آن‌گاه $a^+ \in A$. $(a^+ := a \cup \{a\})$

(ب) (۱۰ نمره) آیا مجموعه‌ی استقرائی‌ای به‌جز مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد؟

جواب. بله. به‌عنوانِ مثال مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A := \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}, \mathbb{N}^+, \mathbb{N}^{++}, \ldots\}$$

هرچند که بصورت غیر رسمی در سطر بالا مجموعه‌ای را معرّفی کردیم که استقرایی است و مخالفِ $\mathbb{N}$ است، اما می‌توان به کمکِ (تعمیمی از) قضیه‌ی بازگشت وجود چنین مجموعه‌ای را ثابت کرد که البته منظور سؤال اثبات وجودِ چنین مجموعه‌ای نیست و ما هم این‌جا ثابت نمی‌کنیم.
در واقع می‌توان مجموعه‌ی زیر را در نظر گرفت:

$$B := \mathbb{N} \cup \{b, b^+, b^{++}, \ldots\}$$

که در آن b یک مجموعه‌ی دل‌خواه است که $b \notin \mathbb{N}$.

(ج) (۱۰ نمره) به کمکِ مجموعه‌هایِ استقرایی ثابت کنید: «هر عددِ طبیعیِ ناصفر! تالیِ یک عددِ طبیعی است.»

جواب. مجموعه‌ی S را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم:

$$S := \{n \in \mathbb{N} : n = 0 \vee \exists m (n = m^+)\}$$

کافیست نشان دهیم مجموعه‌ی S استقرایی است. به وضوح $0 \in S$. حال فرض کنید $n \in S$. نشان می‌دهیم $n^+ \in S$.
از تعریفِ S به وضوح دیده می‌شود که برای هر $k \in \mathbb{N}$ (مستقل از این‌که $k \in S$ یا $k \notin S$) داریم $k^+ \in S$. بنابراین

$.n^+ \in S$

۲. (آ) (۱۰نمره) تعریفِ جمع رویِ اعدادِ گویا و حقیقی را بنویسید.

جواب. تعریف جمع روی اعدادِ گویا: فرض کنید $[(a,b)]_\sim$ و $[(c,d)]_\sim$ دو عدد گویا باشند که در آن a,b,c و d اعدادِ صحیح‌اند و $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی است.

$$[(a,b)]_\sim +_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim := [(ad +_{\mathbb{Z}} bc, bd)]_\sim$$

تعریفِ جمع رویِ اعدادِ حقیقی: فرض کنید x و y دو عددِ حقیقی باشند. به عبارتِ دیگر x و y دو برشِ ددِکیند هستند.

$$x +_{\mathbb{R}} y := \{a +_{\mathbb{Q}} b : a \in x, b \in y\}$$

(ب) (۲۰نمره) هر کدام از تعاریفِ فوق که نیاز به قضایایِ خوش‌تعریفی دارد، قضیه‌ی خوش‌تعریفی را برایِ آن بیان کرده و آن را اثبات کنید.

جواب. قضیه‌ی خوش تعریفی آن‌طور که در کلاسِ درس مطرح شده است، برای جمع رویِ اعدادِ گویا باید اثبات شود: فرض کنید

$$(a,b) \sim (a',b') \qquad (c,d) \sim (c',d') \tag{۱}$$

و نتیجه بگیرید که

$$[(a,b)]_\sim +_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim = [(a',b')]_\sim +_{\mathbb{Q}} [(c',d')]_\sim \tag{۲}$$

یا به عبارتِ دیگر

$$(ad +_{\mathbb{Z}} bc, bd)\ (a'd' +_{\mathbb{Z}} b'c', b'd') \tag{۳}$$

یا این‌که معادلاً

$$adb'd' + bcb'd' = bda'd' + bdb'c' \tag{۴}$$

طبقِ تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی، از معادله ۱ می‌توان نتیجه گرفت

$$ab' = a'b \qquad cd' = c'd \tag{۵}$$

پس کافیست که از تساوی‌های معادله ۵، معادله ۴ را نتیجه بگیریم. با ضربِ طرفینِ تساویِ اولِ معادله ۵ در dd' و ضرب طرفینِ تساویِ دوم در bb' داریم

$$adb'd' = bda'd' \qquad bcb'd' = bdb'c' \tag{۶}$$

حالا اگر تساوی‌هایِ موجود در معادله ۶ را با هم جمع کنیم به معادله ۴ می‌رسیم.

۳. (۳۰نمره) اعدادِ اصلیِ داده شده را به ترتیب صعودی مرتب کنید:

$$\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})} \quad , \quad (\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0} \quad , \quad 2^{(2^{\aleph_0})} \quad , \quad (\aleph_0^{\aleph_0})^{(\aleph_0^{\aleph_0})}$$

جواب. فرض کنید

$$\kappa := \aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})} \quad , \quad \lambda := (\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0} \quad , \quad \theta := 2^{(2^{\aleph_0})} \quad , \quad \eta := (\aleph_0^{\aleph_0})^{(\aleph_0^{\aleph_0})}$$

$$2 \leq \aleph_0 \Longrightarrow 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \tag{7}$$

از طرف دیگر داریم

$$\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0} \Longrightarrow \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 . \aleph_0} = 2^{\aleph_0} \tag{8}$$

حالا با استفاده از معادله ۷ و معادله ۸، طبق قضیه‌ی کانتور–برنشتاین می‌توان نتیجه گرفت $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

$$2 \leq \aleph_0 \Longrightarrow 2^{2^{\aleph_0}} \leq \aleph_0^{2^{\aleph_0}} \tag{9}$$

از طرف دیگر داریم

$$\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0} \Longrightarrow \aleph_0^{2^{\aleph_0}} \leq (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 . 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} \tag{10}$$

حالا با استفاده از معادله ۹ و معادله ۱۰، طبق قضیه‌ی کانتور–برنشتاین می‌توان نتیجه گرفت $\aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$. بنابراین تساوی‌هایِ زیر را داریم:

$$\kappa = \aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} \quad , \quad \lambda = \aleph_0^{\aleph_0 . \aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \quad , \quad \theta = 2^{2^{\aleph_0}} \quad , \quad \eta = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 . 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

بنابراین داریم

$$\lambda \leq \kappa = \theta = \eta$$

و از طرفی طبق قضیه‌ی کانتور، $\kappa \neq \lambda$ و بنابراین

$$\lambda \lneqq \kappa = \theta = \eta$$

۴. صورتِ زیر تعمیمی از قضیه‌ی بازگشت است: «برای هر تابعِ $g : A \longrightarrow B$ و $F : B \times A \longrightarrow B$، تابعِ یکتایِ $f : \mathbb{N} \times A \longrightarrow B$ وجود دارد طوری‌که برایِ هر $a \in A$ داشته باشیم: $f(0, a) = g(a)$ و $f(n^+, a) = F(f(n, a), a)$.»

(آ) (۱۰نمره) به کمکِ این تعمیم از قضیه‌ی بازگشت، تعریفِ بازگشتیِ ضرب رویِ اعدادِ طبیعی را بنویسید.

جواب. با در نظر گرفتنِ $A = B = \mathbb{N}$، $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $g(n) = 0$ و همچنین $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ را به این صورت در نظر بگیرید $F(m,n) := m+n$. حالا طبق تعمیمِ بیان شده در بالا از قضیه‌ی بازگشت، تابعی مثلِ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود است طوری‌که

$$\begin{cases} f(0,k) = 0 \\ f(n^+,k) = f(n,k) + k \end{cases}$$

این تابعِ f، همان تابعِ ضرب رویِ اعدادِ طبیعی است، یعنی $f(m,n) = m.n$.

(ب) (۱۰ نمره) نشان دهید تابعی مثلِ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ وجود دارد طوری‌که

$$f(n) = n^{\underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{n \text{ مرتبه}}}$$

راه‌نمایی: ابتدا سعی کنید تابعی مثلِ $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ تعریف کنید و سپس از رویِ آن تابع f را تعریف کنید. هم‌چنین در این مسأله فرض بر این است که تابع‌های جمع $(n+k)$ و نما (n^k) تعریف شده‌اند.

جواب. ابتدا سعی می‌کنیم تابعِ h را طوری تعریف کنیم که

$$h(n,k) = k^{\underbrace{k^{k^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k}}}}}}_{n \text{ مرتبه}}}$$

فرض کنید $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ تابعِ نما باشد یعنی $F(n,m) = m^n$. با در نظر گرفتنِ $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ و $g(n) = n$، طبقِ تعمیمِ قضیّه‌ی بازگشت، تابعی مثلِ $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ وجود دارد که در شرایطِ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} h(0,k) = k \\ h(n^+,k) = F(h(n,k),k) = k^{h(n,k)} \end{cases}$$

حالا به کمکِ این تابع، به راحتی می‌توان تابعِ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ را به این صورت تعریف کرد $f(n) := h(n,n)$.

۵. (۱۰ نمره) می‌دانیم که اگر دو تابعِ پیوسته‌ی $f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$ با هم برابر باشند، همه‌جا با هم برابرند. از این خاصیت استفاده کنید و تعداد کل توابعِ پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ را بیابید.

جواب. فرض کنید $\mathcal{C}$ مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. نشان می‌دهیم $|\mathcal{C}| = 2^{\aleph_0}$. فرض کنید $\mathcal{C}_0$ مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ ثابت باشد (تابع‌هایی که برای هر $x \in \mathbb{R}$ مقدار ثابتی اختیار می‌کنند). به راحتی می‌توان نشان داد تابعِ زیر یک تناظرِ یک‌به‌یک و پوشا از $\mathcal{C}_0$ به $\mathbb{R}$ است.

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \qquad \mathcal{F}(f) := f(0)$$

بنابراین $|\mathcal{C}_\circ| = |\mathbb{R}| = ۲^{\aleph_\circ}$. پس از آن‌جایی که هر تابعِ ثابت، پیوسته است، می‌توان نتیجه گرفت $|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{C}_\circ| = ۲^{\aleph_\circ}$. **حالا** نشان می‌دهیم $|\mathcal{C}| \leq ۲^{\aleph_\circ}$ ، سپس از قضیه‌ی شرودر برنشتاین نتیجه می‌گیریم که $|\mathcal{C}| = ۲^{\aleph_\circ}$.

تابعِ $\mathcal{H} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ را به این صورت در نظر بگیرید:

$$\mathcal{H}(f) := f|_{\mathbb{Q}} :=$$ تحدیدِ تابعِ f به $\mathbb{Q}$

با توجّه به حکمِ بیان شده در صورتِ مسأله می‌توان نتیجه گرفت که $\mathcal{H}$ یک تابعِ یک‌به‌یک است. بنابراین

$$۲^{\aleph_\circ} = |\mathcal{C}_\circ| \leq |\mathcal{C}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = (۲^{\aleph_\circ})^{\aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ . \aleph_\circ} = ۲^{\aleph_\circ}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی شرودر_برنشتاین می‌توان نتیجه گرفت $|\mathcal{C}| = ۲^{\aleph_\circ}$.

موفق باشید.

امتحان پایان ترم مبانی ریاضیات

تاریخ: ۲۰ دی ۱۳۹۳

مدت امتحان: ۲ ساعت و نیم

مدرس: مجتهدی

---

۱. (۳۰نمره) (آ) لم زرن را بیان کنید.

(ب) به کمک لم زرن نشان دهید برای هر مجموعه‌ی A، یک رابطه‌ی خوش‌ترتیبی مثل $\prec$ روی آن وجود دارد. (راهنمایی: مجموعه‌ی همه‌ی خوش‌ترتیبی‌ها روی زیرمجموعه‌های A را در نظر بگیرید.)

۲. (۳۰نمره) (آ) فرض کنید برای هر n، A_n مجموعه‌ای با عدد اصلیِ κ باشد ($|A_n| = \kappa$) و $\kappa \geq \aleph_0$. نشان دهید

$$|\bigcup_{i=0}^{n} A_n| = \kappa$$

(ب) نشان دهید تعداد دنباله‌های متناهی از اعداد صحیح، $\aleph_0$ است.

۳. (۲۰نمره) عدد حقیقی r را گوییم جبری است اگر ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. مثلاً $\sqrt{2}$ عددی جبری است چون ریشه‌ی چندجمله‌ایِ $x^2 - 2$ است. همچنین کلّیّه‌ی اعداد گویا جبری هستند امّا می‌توان ثابت کرد که مثلاً π جبری نیست. به کمک مسأله‌ی قبل نشان دهید تعداد اعداد جبری $\aleph_0$ است.

۴. (۲۰نمره) ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد حقیقی شمارا نیست.

۵. (۲۰نمره) مجموعه‌ی X را گوییم متعدی است اگر $\forall x, y(x \in y \in X \to x \in X)$.

(آ) نشان دهید X متعدّی است اگر و فقط اگر $\bigcup X \subseteq X$.

(ب) ثابت کنید $\mathbb{N}$ متعدّی است.

موفق باشید.